

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

### **Рабочая программа дисциплины**

Теория представлений

Уровень высшего образования  
бакалавриат

Направление подготовки / специальность  
01.03.01 Математика

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

Форма обучения  
очная

Нижегород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к вариативной части Б1.В.ДВ.05.02.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.05.02 «Теория представлений» относится к части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-5  Обладает навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования	ПК-5.1: Знает уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного процесса.	Знать основные принципы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в области теории представлений, основы строгого доказательства утверждений, вывода следствий из полученных результатов	Собеседование
	ПК-5.2: Умеет применять методы анализа научно-технической информации	Уметь применять методы анализа информации к решению практических задач, связанных с исследованием свойств теории представлений конечных групп	Задачи
	ПК-5.3: Имеет практический опыт решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных	Владеть техникой строгого доказательства теоретических утверждений, связанных с вопросами теории групп	Собеседование и задачи

	способов решения задач		
--	---------------------------	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>5 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>22</b>
- занятия семинарского типа	<b>22</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>94</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)			В том числе												Самостоятельная работа обучающегося, часы		
				Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы														
				из них														
	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Всего								
Очная			Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	
Тема 1. Основные понятия теории представлений	32			6			6					12			30			
Тема 2. Характеры комплексных представлений	36			8			8					16			30			
Тема 3. Представления	38			8			8					16			34			

некоторых специальных групп																	
Текущий контроль (КСР)	2											2					
Промежуточная аттестация - экзамен	36																
Итого	144		22			22						46			94		

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме собеседований и обсуждения решения задач на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Обсуждение результатов самостоятельной работы.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 6.2.

#### 4. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.	Уровень знаний ниже минимальных требований.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в

	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Имели место грубые ошибки.	много негрубых ошибок.	подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	программе подготовки, без ошибок.	объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция

		сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения. .

### 6.2.1 Контрольные вопросы

<i>вопросы</i>	<i>Код формируемой компетенции</i>
1. Линейное представление группы. Степень представления. Эквивалентность представлений. G-модули. Примеры.	ПК-5
2. Подпредставление, факторпредставление. Прямая сумма представлений. Неразложимые и неприводимые представления. Примеры.	ПК-5
3. Разложение представление группы $GL(n, K)$ на $M(n, K)$ сопряжениями, разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений, $K=R, C$ .	ПК-5
4. Представление группы $GL(n, K)$ на $M(n, K)$ левыми (правыми) сдвигами, разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений.	ПК-5
5. Представление группы $O(n)$ на $M(n, R)$ сопряжениями, разложение в прямую сумму неприводимых подпредставлений.	ПК-5
6. Унитарные представления. Эквивалентность комплексного представления конечной группы унитарному представлению.	ПК-5

7. Теорема Машке.	ПК-5
8. Лемма Шура.	ПК-5
9. Характер представления. Элементарные свойства комплексных характеров.	ПК-5
10. Свойство ортогональности характеров неприводимых представлений.	ПК-5
11. Кратность неприводимого $G$ -модуля в представлении. Взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных комплексных представлений и характерами	ПК-5
12. Скалярный квадрат характера.	ПК-5
13. Центральные функции на группе и характеры неприводимых представлений.	ПК-5
14. Разложение регулярного представления группы на неприводимые	ПК-5
15. Представления конечных абелевых групп.	ПК-5
16. Разложение естественного представления 2-транзитивной группы на неприводимые.	ПК-5
17. Таблица характеров. Второе соотношение ортогональности для характеров.	ПК-5
18. Неприводимые представления групп $S_3$ , $S_4$ , $A_4$ .	ПК-5
19. Тензорное произведение представлений. Кольцо характеров.	ПК-5

### 6.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции «ПК-5»:

1. Доказать, что все неприводимые комплексные представления конечной группы одномерны тогда и только тогда, когда она коммутативна.
2. Найти все неизоморфные одномерные комплексные представления групп  $S_3$  и  $A_4$ .
3. Пусть элемент  $g$  группы  $G$  имеет порядок  $k$  и  $\chi$  —  $n$ -мерный характер группы  $G$ . Доказать, что  $\chi(g)$  есть сумма  $n$  (не обязательно различных) корней степени  $k$  из 1.
4. Пусть  $\Phi$  — трехмерное комплексное представление группы  $\langle a \rangle_3$  и  $\chi_\Phi(g) = 0$  для некоторого  $g \in \langle a \rangle_3$ . Доказать, что  $\Phi$  эквивалентно регулярному представлению.
5. Пусть  $\chi$  — двумерный комплексный характер группы  $G = \langle a \rangle_3 \times \langle b \rangle_3$ . Доказать, что  $\chi(g) \neq 0$  для всякого  $g$  из  $G$ .

6. Пусть  $\chi$  — двумерный комплексный характер группы нечётного порядка. Доказать, что  $\chi(g) \neq 0$  для любого  $g$  из  $G$ .

7. Пусть  $\Phi$  —  $n$ -мерное комплексное представление конечной группы  $G$ . Доказать, что  $\chi_\Phi(g) = n$  тогда и только тогда, когда  $g$  принадлежит ядру представления  $\Phi$ .

8. Чему равно “среднее значение”

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

неприводимого характера неединичной конечной группы  $G$ ?

9. Доказать, что для конечной циклической группы  $A$ , группа характеров  $\bar{A}$  — конечная циклическая группа того же порядка.

### 6.2.3 Типовые задачи для оценки сформированности компетенции «ПК-5»:

1. Будет ли линейным представлением группы  $R$  в пространстве  $C(R)$  непрерывных функций на вещественной прямой отображение  $L$ , определяемое по формулам:

а)  $(L(t)f)(x) = f(x - t);$

б)  $(L(t)f)(x) = f(tx);$

в)  $(L(t)f)(x) = f(e^t x);$

д) подпространство нечётных функций;

е) линейная оболочка функций  $\sin x$  и  $\cos x$ ;

ж) подпространство многочленов от  $\cos x$  и  $\sin x$ ;

з) линейная оболочка функций  $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos px$ .

2. Найти подпространства пространства многочленов, инвариантные относительно представления  $L$  из задачи 1а).

3. Записать матрицами (в каком-либо базисе) ограничение линейного представления  $L$  из задачи 1 а) на подпространство многочленов степени  $\leq 2$ .

4. Записать матрицами (в каком-либо базисе) ограничение линейного представления  $L$  из задачи 1 а) на линейную оболочку функций  $\sin x$  и  $\cos x$ .

5. Доказать, что каждая из следующих формул определяет линейное представление группы  $A \in GL_n(F)$  в пространстве  $M_n(F)$

а)  $\Lambda(A)X = A \cdot X ;$

б)  $Ad(A)X = A \cdot X \cdot A^{-1};$



в)  $\Phi(A)X = A \cdot X \cdot A^t$ .

6. Доказать, что линейное представление  $\Lambda$  из задачи 9, а) вполне приводимо и его инвариантные подпространства совпадают с левыми идеалами алгебры  $M_n(F)$ .

7. Доказать, что если  $\text{char } F$  не делит  $n$ , то линейное представление  $\text{Ad}$  из задачи 9, б) вполне приводимо и его нетривиальные инвариантные подпространства — пространство матриц с нулевым следом и пространство скалярных матриц.

8. Доказать, что если  $\text{char } F$  не равна 2, то линейное представление  $\Phi$  из задачи 9, в) вполне приводимо и его нетривиальные инвариантные подпространства — пространства симметрических и кососимметрических матриц.

9. Пусть  $V$  — двумерное пространство над полем  $F$ . Показать, что существуют представления  $\rho_1$  и  $\rho_2$  группы  $S_3$  на  $V$ , для которых в некотором базисе пространства  $V$  будут выполнены соотношения

$$\rho_1((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что эти представления изоморфны тогда и только тогда, когда  $\text{char } F \neq 3$ .

10. Пусть  $V$  — двумерное векторное пространство над полем  $F$ . Показать, что существуют два представления  $\rho_1$  и  $\rho_2$  группы  $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$  на  $V$ , для которых в некотором базисе пространства  $V$  будут выполнены соотношения

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Будут ли эти представления эквивалентны?

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Теория представлений 4 курс (математика)»,

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4501>

созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

а) Основная литература:

1. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

б) Дополнительная литература:

1. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Автор (ы): д.ф.-м.н., проф. Кузнецов М.И.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.