

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дополнительные главы линейной алгебры

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

09.03.02 - Информационные системы и технологии

---

Направленность образовательной программы

Информационные системы и технологии в физических исследованиях

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина ФТД.03 Дополнительные главы линейной алгебры является факультативом в образовательной программе.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции  |  | Наименование оценочного средства   |   |
|--|--|--|------------------------------------|---|
|  | Индикатор достижения компетенции<br>(код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине  | Для текущего контроля успеваемости | Для промежуточной аттестации            |
| ПК-15: Способен применять современный математический аппарат при проведении, моделировании и анализе результатов компьютерного или натурального эксперимента | <p>ПК-15.1: Знать современный математический аппарат, используемый при разработке компьютерных моделей и анализе результатов</p> <p>ПК-15.2: Уметь применять современный математический аппарат при проведении, моделировании и анализе результатов компьютерного или натурального эксперимента</p> <p>ПК-15.3: Владеть навыками применения современных аналитических и численных методов в решении профессиональных задач</p> | <p>ПК-15.1: Знание современного математического аппарата линейной алгебры, используемого при разработке компьютерных моделей и анализе результатов</p> <p>ПК-15.2: Умение применять современный математический аппарат линейной алгебры при проведении, моделировании и анализе результатов компьютерного или натурального эксперимента</p> <p>ПК-15.3: Владение навыками применения современных аналитических и численных методов линейной алгебры в решении профессиональных задач</p> | Контрольная работа                 | Зачёт:<br>Контрольные вопросы<br>Задачи |

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

|                                 |              |
|---------------------------------|--------------|
|                                 | <b>очная</b> |
| <b>Общая трудоемкость, з.е.</b> | <b>1</b>     |
| <b>Часов по учебному плану</b>  | <b>36</b>    |
| в том числе                     |              |

|   |                          |
|---|--------------------------|
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>                                  |                          |
| <b>- занятия лекционного типа</b>   | <b>16</b>                |
| <b>- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)</b> | <b>16</b>                |
| <b>- КСР</b>  | <b>1</b>                 |
| <b>самостоятельная работа</b>   | <b>3</b>                 |
| <b>Промежуточная аттестация</b>   | <b>0</b><br><b>Зачёт</b> |

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

| Наименование разделов и тем дисциплины                  | Всего<br>(часы) | в том числе   |  |             |  |
|---|-----------------|---|--|-------------|--|
|   |                 | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы<br>из них |  |             | Самостоятельная<br>работа<br>обучающегося,<br>часы |
|   |                 | Занятия<br>лекционного<br>типа  | Занятия<br>семинарского<br>типа<br>(практические<br>занятия/ лабора<br>торные<br>работы), часы | Всего       |  |
|   | о<br>ф<br>о     | о<br>ф<br>о   | о<br>ф<br>о  | о<br>ф<br>о | о<br>ф<br>о  |
| 1. Повтор избранных глав общего курса линейной алгебры. | 2               | 2   | 0  | 2           | 0  |
| 2. Полярное и сингулярное разложения                    | 10              | 4   | 4  | 8           | 2  |
| 3. Псевдорешение системы уравнений.                     | 11              | 4   | 6  | 10          | 1  |
| 4. Метод наименьших квадратов.                          | 4               | 2   | 2  | 4           | 0  |
| 5. Квадратичные формы.                                  | 8               | 4   | 4  | 8           | 0  |
| Аттестация  | 0               |   |  |             |  |
| КСР   | 1               |   |  | 1           |  |
| Итого   | 36              | 16  | 16   | 33          | 3  |

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Повтор избранных глав общего курса линейной алгебры. Обзор основных понятий о системах линейных уравнений и базисах в линейных пространствах, о линейных операторах в евклидовых пространствах.
2. Полярное разложение матрицы оператора. Сингулярное разложение матрицы оператора.
3. Псевдорешение системы линейных уравнений. Псевдообратная матрица. Псевдорешения и сингулярное разложение.
4. Метод наименьших квадратов.
5. Квадратичные формы. Положительно определённые матрицы. Квадратный корень из матрицы. Обобщённая задача на собственные значения. Принципы минимума и отношение Рэлея.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Д.В. Хомицкий, "Дополнительные главы линейной алгебры", конспект лекций и практических занятий, 2023.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-15:

### Контрольная работа по теме «Полярное и сингулярное разложение оператора»

Задача 1.

Получить полярное разложение матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Задача 2.

Получить сингулярное разложение матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

| Оценка     | Критерии оценивания  |
|------------|--|
| зачтено    | Обучаемый успешно решил половину или более половины задач из контрольной работы. |
| не зачтено | Обучаемый решил менее половины задач из контрольной работы.                      |

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

| Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций) | плохо      | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
|---|------------|---------------------|-------------------|--------|--------------|---------|-------------|
|   | не зачтено |                     | зачтено           |        |              |         |             |

|               |   |  |  |   |   |   |  |
|---------------|---|--|--|---|---|---|--|
| <u>Знания</u> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки                          | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок                               | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.  | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.   |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа              | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа                | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами                                      | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами   | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов  | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов  | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач  |

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

| Оценка  |                          | Уровень подготовки   |
|---------|--------------------------|--|
| зачтено | <b>превосходно</b>       | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой |
|         | <b>отлично</b>           | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».  |
|         | <b>очень хорошо</b>      | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»  |
|         | <b>хорошо</b>            | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».   |
|         | <b>удовлетворительно</b> | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»                                     |

|            |                     |  |
|------------|---------------------|--|
| не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно». |
|            | плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»                |

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-15

| №  | Вопросы  | Код формируемой компетенции |
|----|--|-----------------------------|
| 1  | Системы линейных уравнений. Условие совместности. Структура общего решения.                          | ПК-15                       |
| 2  | Переход от одного базиса к другому в линейном пространстве.  | ПК-15                       |
| 3  | Линейные операторы в евклидовом пространстве. Самосопряжённые и унитарные (ортогональные) операторы. | ПК-15                       |
| 4  | Полярное разложение оператора.   | ПК-15                       |
| 5  | Сингулярное разложение оператора.  | ПК-15                       |
| 6  | Псевдорешение системы линейных уравнений.  | ПК-15                       |
| 7  | Псевдообратная матрица.  | ПК-15                       |
| 8  | Псевдорешения и сингулярное разложение   | ПК-15                       |
| 9  | Метод наименьших квадратов.  | ПК-15                       |
| 10 | Квадратичные формы. Положительно определённые матрицы.   | ПК-15                       |
| 11 | Квадратный корень из матрицы. $n$ -мерные эллипсоиды.  | ПК-15                       |
| 12 | Обобщённая задача на собственные значения.   | ПК-15                       |
| 13 | Принцип минимума для системы линейных уравнений и отношение Рэлея.                                   | ПК-15                       |

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

| Оценка     | Критерии оценивания  |
|------------|--|
| зачтено    | Обучаемый успешно и самостоятельно либо при незначительной помощи преподавателя ответил на контрольный вопрос. |
| не зачтено | Обучаемый не ответил на контрольный вопрос, а также не ответил на дополнительные вопросы.                      |

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-15

- Получить полярное разложение матрицы  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- Получить сингулярное разложение матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Найти нормальное псевдорешение для системы уравнений  $Ax=b$  с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  и столбцом свободных членов  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а также псевдообратную матрицу  $A^+$ .
- С помощью сингулярного разложения матрицы системы найти нормальное псевдорешение системы  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$
- В рамках метода наименьших квадратов путём решения нормальной системы уравнений найти нормальное псевдорешение, отвечающее аппроксимации с помощью линейной функции  $f(x)=c_1+c_2x$  для набора данных (1, 4), (2, 8), (3, 10).
- Исследовать на экстремум функцию двух переменных  $f(x, y)=(x^2-2x) \cos y$  в точке  $x=1$ ,  $y=\pi$ .
- Преобразовать выражение  $f(x, y) = 3x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2$  к сумме квадратов, найдя собственные значения и собственные векторы симметричной матрицы  $A$  для данной квадратичной формы.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

| Оценка     | Критерии оценивания  |
|------------|--|
| зачтено    | Обучаемый самостоятельно выбрал правильный метод для решения задачи и получил решение самостоятельно либо при незначительной помощи преподавателя. |
| не зачтено | Обучаемый не смог выбрать правильного метода решения задачи и не решил её.   |

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Беклемишев Дмитрий Владимирович. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : [учеб. для вузов]. - 5-е изд., перераб. - М. : Наука, 1984. - 320 с. - 0.80., 240 экз.
2. Беклемишев Дмитрий Владимирович. Дополнительные главы линейной алгебры : учеб. пособие. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. - 496 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0811-5 : 390.06., 1 экз.
3. Беклемишева Людмила Анатольевна. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : [учеб. пособие для физ.-мат., инженер.-физ. и инженер.-техн. специальностей вузов] / под ред. Д. В. Беклемишева. - М. : Наука, 1987. - 494, [2] с. - 1.30., 63 экз.
4. Стренг Гилберт. Линейная алгебра и ее применения / пер. с англ. Ю. А. Кузнецова, Д. М. Фаге ; под ред. Г. И. Марчука. - М. : Мир, 1980. - 454 с. : ил. - 2.10., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Икрамов Хаким Дододжанович. Задачник по линейной алгебре : учебное пособие / под ред. В. В. Воеводина. - Изд. 2-е, испр. - СПб. : Лань, 2006. - 320 с. - (Лучшие классические учебники. Математика) (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 5-8114-0670-3 : 224.84., 1 экз.
2. Хорн Роджер. Матричный анализ / пер. с англ. Х. Д. Икрамова [и др.] ; под ред. Х. Д. Икрамова. - М. : Мир, 1989. - 655 с. - ISBN 5-03-001042-4 : 3.00., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Не предусмотрено

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения. Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную



информационно-образовательную среду.  
Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 09.03.02 - Информационные системы и технологии.

Автор(ы): Хомицкий Денис Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Мальцев Александр Александрович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Морозов Олег Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 09.01.2024, протокол № б/н.