Приложение 4

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Методы оптимизации

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.04 Методы оптимизации относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции**		**Наименование оценочного средства**	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	**Результаты обучения по дисциплине**	**Для текущего контроля успеваемости**	**Для промежуточной аттестации**
ПК-4: Способен применять методы математического и компьютерного исследования при анализе задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных наук	*ПК-4.1: Знает фундаментальные и теоретические основы, необходимые для исследования научных проблем* *ПК-4.2: Умеет самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определять цели и задачи исследования, а также выбирать корректный метод исследования научной проблемы* *ПК-4.3: Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой*	*ПК-4.1:* *Знание:* *З1) основных фактов из математического анализа, геометрии, алгебры и других дисциплин, на которые опирается изучение методов оптимизации* *З2) основных принципов и методов создания, анализа, аналитического и численного исследования математических моделей в области методов оптимизации:* *1. принцип Р. Беллмана, структуру рекуррентных уравнений Р. Беллмана;* *2. понятие оптимальности для задач векторной оптимизации;* *3. основные понятия и факты из выпуклого анализа, включая свойства выпуклых функций;* *4. запись условий оптимальности для различных типов задач математического программирования: условия Лагранжа, Каруша–Куна–Таккера, достаточные условия второго порядка и их роль в построении численных методов;* *5. классические и эффективные*	*Собеседование* *Практическое задание* *Контрольная работа*	*Экзамен:* *Разноуровневые задания*

		вычислительные методы одномерной, многомерной локальной и глобальной оптимизации и условия их применимости; *6. методы учета ограничений в локальной и многоэкстремальной оптимизации.* *7. принцип максимума Л.С. Понтрягина в задачах оптимального управления;* *8. необходимые условия экстремума в простейших задачах вариационного исчисления* *З3) дополнительных принципов, фактов, понятий, методов из предметной области.* *ПК-4.2:* *Умение:* *У1) решать математические задачи и проблемы создания, анализа и исследования математических моделей из области методов оптимизации, применять численные и аналитические методы:* *1. выполнять математическую постановку задач оптимизации* *2. строить вычислительные схемы решения задач динамического программирования с помощью уравнений Беллмана;* *3. использовать методы сверток в задачах многокритериальной оптимизации;* *4. находить решения задач математического программирования, имеющих простое аналитическое описание, с использованием условий Каруша-Куна-Таккера;* *5. выбирать эффективные вычислительные методы решения нелинейных задач*		

		оптимизации различного типа и правильно интерпретировать полученные результаты. *6. применять универсальные математические пакеты для выполнения оптимизационных расчетов;* *7. применять принцип максимума для аналитического решения простых задач оптимального управления;* *8. применять уравнение Эйлера и его обобщения, а также условия трансверсальности и условие Лежандра для решения задач вариационного исчисления.* *У2) доказывать ранее изученные в рамках дисциплины математические утверждения, а также новые, примыкающие к ним;* *У3) применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности.* *ПК-4.3:* *Владение:* *В1) терминологией предметной области;* *В2) принципами построения и выбора эффективных численных методов решения нелинейных задач оптимизации;* *В3) приемами аналитического решения задач из различных разделов методов оптимизации и интерпретации результатов.*		

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная

Общая трудоемкость, з.е.	**5**
Часов по учебному плану	**180**
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	**48**
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	**48**
- КСР	**2**
самостоятельная работа	**46**
Промежуточная аттестация	**36** **Экзамен**

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	офо	офо	офо	офо	офо
Раздел 1. Введение: постановки задач нелинейного математического программирования, многокритериальные задачи. Динамическое программирование.	24	6	12	18	6
Раздел 2. Элементы выпуклого анализа. Теория условий оптимальности.	28	10	10	20	8
Раздел 3. Численные методы безусловной локальной оптимизации.	28	8	10	18	10
Раздел 4. Методы учета функциональных ограничений в локальной оптимизации.	14	6	3	9	5
Раздел 5. Численные методы многоэкстремальной оптимизации.	12	6	3	9	3
Раздел 6. Задачи и методы оптимального управления.	18	6	6	12	6
Раздел 7. Задачи и методы вариационного исчисления.	18	6	4	10	8
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	48	48	98	46

Содержание разделов и тем дисциплины

Содержание разделов лекционной части дисциплины:

Раздел 1. Введение: постановки задач нелинейного математического программирования, многокритериальные задачи. Динамическое программирование

1.1. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ

1.1.1. Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и

глобально-оптимального решений, строгого и острого локальных минимумов.
1.1.2. Обобщение понятий оптимальности на многокритериальные задачи оптимизации. Решения оптимальные по Парето и Слейтеру (эффективные и слабо эффективные решения). Методы линейной свертки и свертки Гермейера, их геометрическая интерпретация. Свойства линейной свертки (с доказательствами), свойства свертки Гермейера (с геометрическим обоснованием в R2) — по материалам лабораторной работы.
1.2. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
1.2.1. Задачи с фиксированным временем начала и окончания процесса.
Понятие состояния управляемого динамического процесса. Постановка задачи. Требования, накладываемые на понятие «состояние» в динамическом программировании. Определения функции Беллмана при решении «от конца» и «от начала». Метод рекуррентных уравнений Беллмана при записи «от конца» (вывод, включая лемму о расщеплении инфинума, общая структура уравнений, порядок применения). Принцип Беллмана как необходимое и как достаточное условия, формулируемые как «от начала», так и «от конца», доказательство принципа Беллмана в форме необходимого условия (в аддитивном случае) и его доказательство в форме достаточного условия (для критериев аддитивного и типа максимума). Связь принципа Беллмана с уравнениями Беллмана. Запись рекуррентных уравнений Беллмана от начала процесса. Пример использования соотношений Беллмана (аналитическое решение задачи об оптимальном распределении ресурса с функцией дохода в виде корня квадратного).
1.2.2. Задачи с нефиксированной длительностью процесса.
Постановка задачи, отличия от постановки с фиксированным временем окончания. Обобщение уравнений Беллмана на задачи с нефиксированной длительностью процесса. Применение к задачам поиска оптимальных путей на графах. Задачи поиска оптимальных путей на графах с неотрицательными весами ребер: алгоритм метода Дейкстры, доказательство оптимальности построенных им путей (по материалам лабораторной работы), связь метода Дейкстры с принципом Беллмана в форме достаточного условия. Задачи на графах с векторными весами ребер. Отыскание оптимальных по Парето и Слейтеру решений методом сверток, согласование вида свертки с видом критерия, скаляризация графа при согласованном выборе (использовать материалы лабораторной работы).
Раздел 2. Элементы выпуклого анализа. Теория условий оптимальности.
2.1. Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции. Отделимость точки и множества, строгая и сильная отделимость, геометрический смысл понятия отделимости, две теоремы об отделимости. Свойства выпуклых функций (с самостоятельно проведенными доказательствами, кроме свойства непрерывности во внутренних точках), включая два критерия выпуклости. Задача выпуклого математического программирования и ее свойства (с доказательствами). Возможность отсечений подмножеств, не содержащих глобального минимума, по измерениям градиента в гладких выпуклых задачах (следствие критерия выпуклости дифференцируемых функций).
2.2. Градиент и производная по направлению, ее вычисление в случае дифференцируемости функции, свойства градиента, множество направлений строгого локального убывания. Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма.
Задачи с ограничениями общего вида, функция Лагранжа для общей задачи математического программирования. Определение понятия регулярности допустимого множества в точке и в целом. Задачи с ограничениями-равенствами, теорема Лагранжа (метод множителей Лагранжа). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке для ограничений-равенств. Геометрическая интерпретация условий оптимальности из теоремы о методе множителей Лагранжа – геометрический смысл условий ее выполнения.
Запись условий минимума в задачах математического программирования с ограничениями смешанного типа. Теорема о достаточности для глобального минимума условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме, записанных через принцип минимума. Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме, записанных через принцип минимума для выпуклой задачи с регулярным множеством. Теорема Каруша-Куна-Таккера в

недифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи, записанная через седловую точку функции Лагранжа. Достаточное условие Слейтера регулярности допустимого множества. Теорема о необходимых и достаточных условиях минимума в дифференциальной форме для класса выпуклых регулярных задач. Геометрическая интерпретация условий оптимальности, записанных в градиентной форме для выпуклого регулярного случая. Геометрическая интерпретация ситуации $\lambda_i<0$ при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств. Направленная коррекция гипотез об активности при решении выпуклых регулярных задач с использованием условий Каруша-Куна-Таккера.

Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для невыпуклых задач – условие оптимальности первого порядка. Конические аппроксимации вспомогательных множеств. Лемма о непересекаемости конических аппроксимаций, построенных для точки условного локального минимума. Формулировка теоремы Люстерника. Лемма о глобальном минимуме в линеаризованной задаче (для основного случая – при непустоте конической аппроксимации допустимого множества). Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке (в форме линейной независимости специального набора градиентов). Геометрические примеры недостаточности условий первого порядка для существования локального минимума в невыпуклом случае.

Теорема о достаточных условиях первого порядка для острого локального минимума (без доказательства). Теорема о достаточных условиях второго порядка для строгого локального минимума в задачах со смешанными ограничениями. Теорема о необходимых условиях второго порядка для локального минимума в задачах со смешанными ограничениями (без доказательства).

Разделы 3-5. Численные методы безусловной локальной оптимизации. Методы учета функциональных ограничений в локальной оптимизации. Численные методы многоэкстремальной оптимизации

3.1. Понятие метода поисковой оптимизации. Испытание и порядок испытания. Априорная и поисковая информация. Пассивные и последовательные алгоритмы. Принцип наилучшего гарантированного результата. Оптимальные и –оптимальные алгоритмы. Понятие одношаговой последовательной оптимальности. Класс унимодальных функций, правило сокращения интервала по двум и по k измерениям. Построение оптимальных и –оптимальных пассивных N–шаговых алгоритмов, их гарантированная эффективность. Симметричные алгоритмы, свойства пропорций деления. Построение –оптимального последовательного симметричного N–шагового алгоритма (метод Фибоначчи). Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения и два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.

3.2. Метод поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом многограннике. Вид нижней оценки выпуклой функции по конечному числу ее испытаний первого порядка. Сведение решения задачи к последовательности задач линейного программирования. Теорема об определении решения (без доказательства).

3.3. Задачи поиска локального экстремума в задачах без ограничений. Общая структура итерационных методов локального поиска. Понятие порядка метода. Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорости сходимости (определения).

Два критерия выбора шагового множителя, их геометрическая интерпретация. Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации. «Аккуратный» одномерный поиск. Простые методы многомерного локального поиска и их свойства: градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска, и метод Ньютона. Вывод итерационного соотношения метода Ньютона, геометрическая интерпретация. Свойства метода наискорейшего градиентного поиска и метода Ньютона. Теоремы сходимости для этих методов. Методы прямого поиска на примере метода Хука-Дживса.

3.4. Более сложные и эффективные методы локальной оптимизации: алгоритм метода Ньютона с регулировкой шага (по одномерной минимизации и по Армихо), модифицированный метод Ньютона с модификацией матрицы Гессе до положительной определенности на основе модифицированного преобразования Холесского (теорема о разложении Холесского, упрощенная схема модифицированного разложения Холесского без учета эффектов вычислительной неустойчивости); квазиньютоновское условие, квазиньютоновский метод Давидона-Флетчера-Пауэлла; понятие сопряженных направлений,

понятие метода сопряженных направлений и его поведение на квадратичных строго выпуклых функциях – теорема о конечной сходимости (с обоснованием), алгоритм метода сопряженных градиентов Флетчера–Ривса для квадратичных и неквадратичных функций (по материалам лабораторного практикума). Вывод основного итерационного соотношения метода Флетчера-Ривса для квадратичных функций с положительно определенными матрицами Гессе.
4.1. Решение задач с ограничениями. Метод внешнего штрафа, функция степенного штрафа, влияние показателя степени на гладкость штрафа. Теорема сходимости. Геометрическое и аналитическое объяснение причин необходимости неограниченного возрастания коэффициента штрафа при гладком штрафе. Свойства метода штрафов: плохая обусловленность вспомогательных задач, характер приближения оценок к решению. Теорема об оценке погрешности решения в зависимости от коэффициента штрафа и показателя степени (без доказательства). Критерий останова в методе штрафа.
5.1. Задачи многоэкстремальной оптимизации. Липшицевы функции и их свойства. Метод Пиявского, теорема об определении решения с заданной точностью. Версия метода с использованием оценки константы Липшица. Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных. Алгоритм информационно–статистического метода в сравнении с методом ломаных.
5.2. Методы редукции размерности. Подход 1 – многошаговая схема редукции, построение методов по многошаговой схеме. Подход 2 – использование фрактальных разверток на основе кривых Пеано. Вид редуцированной задачи на отрезке, свойство Гёльдера. Пример приближенного построения в R2 – развертка Гильберта–Пеано. Частичная потеря информации о близости образов точек в многомерном пространстве. Применение вращаемых разверток.
5.3. Многомерные многоэкстремальные задачи. Нижняя оценка функции на гиперпараллелепипеде по измерению функции в его центре – поточечная оценка и оценка на гиперпараллелепипеде в целом. Метод деления на три: алгоритм для задачи без функциональных ограничений, теорема о свойствах (доказательство — самостоятельно, по аналогии с методом Пиявского). Обобщение метода деления на три на задачи с ограничениями-неравенствами для случая непустого допустимого множества.
5.4. Эвристические мультистартовые методы многоэкстремальной оптимизации, с использованием метода Монте-Карло.
Раздел 6. Задачи и методы оптимального управления
6.1. Постановка задачи. Понятие оптимального управления, области управляемости и неуправляемости. Функция Беллмана в задаче оптимального управления. Получение условий оптимальности в форме уравнения Беллмана для задачи оптимального управления в предположении справедливости гипотез 1 и 2. Теорема о необходимых условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, связь принципа максимума с уравнением Беллмана (получение условий оптимальности в форме принципа максимума из уравнения Беллмана в предположении справедливости гипотез 3 и 4).
6.2. Линейные задачи на оптимальное быстродействие. Постановка, преобразование формы записи принципа максимума для этих задач, исходя из теоремы о принципе максимума для общей задачи. Структура оптимального управления в линейных задачах на оптимальное быстродействие. Условие общности положения. Теорема о принципе максимума, как о необходимых и почти всегда достаточных условиях оптимальности управления (достаточность — без доказательства).
6.3. Другие формы постановки задач оптимального управления, изменения формы принципа максимума (с обоснованием): задача с фиксированным временем достижения; неавтономные задачи; задачи оптимального управления со скользящими концами, условие трансверсальности.

Раздел 7. Задачи и методы вариационного исчисления
4.1. Простейшие задачи вариационного исчисления (с закрепленными, свободными и скользящими концами) — постановки задач. Формализация понятия близости кривых (на примере задач первого и второго типов). Понятие сильного и слабого локального экстремумов.
Метод вариации Лагранжа. Пробные функции, параметрическая вариация кривой. Первая и вторая вариации функционала. Лемма о необходимых условиях локального экстремума (слабого и сильного) в общей форме. Экстремум и экстремаль функционала (определение экстремали). Основная лемма

вариационного исчисления.
4.2. Вычисление первой вариации функционала для задач с закрепленными концами, задач со свободными концами, а также для задач со скользящими концами (требуется умение независимого вывода выражений для первых вариаций). Вывод уравнения Эйлера и граничных условий как необходимых условий первого порядка для экстремума и как необходимых и достаточных условий для экстремалей в трех простейших задачах вариационного исчисления. Естественные граничные условия и условия трансверсальности в задачах со свободными и скользящими концами. Их геометрический смысл. Первые интегралы уравнения Эйлера.
4.3. Экстремали с изломами. Теорема Дюбуа-Реймона (без доказательства). Условия «склейки» Вейерштрасса–Эрдмана при изломе экстремалей (без доказательства).
4.4. Вычисление второй вариации в предположении закрепленных концов. Теорема об условии Лежандра, как необходимом условие второго порядка для минимума (максимума) функционала (с доказательством).
4.5. Вариационные задачи с ограничениями.
Изопериметрическая задача, постановка. Особенность применения подхода Лагранжа с параметрическими вариациями. Теорема об условиях экстремума первого порядка в изопериметрических задачах (с проведением доказательства).
Задачи вариационного исчисления с дифференциальными связями, теорема о сведении к вариационной задаче на безусловный экстремум (без доказательства).

Содержание практических занятий:
Практические занятия (семинарские занятия /лабораторные работы) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.
Практическая подготовка предусматривает: выполнение в рамках лабораторного практикума по дисциплине специальных проектных заданий, направленных на практическое освоение методов математического и компьютерного исследования, необходимых при анализе предложенных задач из предметной области изучаемой дисциплины. Примеры тем проектных заданий, предлагаемых в рамках часов практической подготовки:
1. Синтез, визуализация и исследование с использованием математических пакетов невыпуклых двумерных задач математического программирования с ограничениями–неравенствами, в которых имеются точки Куна-Таккера, не являющиеся условными локальными минимумами;
2. Построение, визуализация и исследование с использованием специального программного обеспечения двумерных задач математического программирования без функциональных ограничений, представляющих сложности для простых методов безусловной локальной оптимизации, сопоставительное исследование на построенных задачах поведения более сложных прикладных методов локальной оптимизации;
3. Построение, визуализация и исследование с использованием специального программного обеспечения структуры двумерных задач математического программирования с ограничениями–неравенствами, исследование на построенных задачах возможностей численных методов учета ограничений на примере метода внешнего степенного штрафа.
Проектные задания выполняются группами из трех–четырех человек.
На проведение практических занятий (семинарских занятий /лабораторных работ) в форме практической подготовки отводится 8 часов из общего объема 48 часов практических занятий.
Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:
– практических навыков в соответствии с профилем ОП, а именно, на формирование практических навыков при выполнении фундаментальных и прикладных работ поискового, теоретического и экспериментального характера;
– компетенций — ПК-4 (способность применять методы математического и компьютерного исследования при анализе задач на основе знаний фундаментальных математических и компьютерных

наук).
Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа, лабораторного типа.
Промежуточная аттестация проходит в форме комплексного экзамена, включающего выполнение практических заданий наряду с традиционными ответами на вопросы по программе дисциплины.

Практические занятия /лабораторные работы организуются, в том числе, в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.
На проведение практических занятий / лабораторных работ в форме практической подготовки отводится: очная форма обучения - 2 ч.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся
Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Методические материалы направлены на обеспечение самостоятельной работы студентов.
Виды самостоятельной работы студентов:
- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка к выполнению работ лабораторного практикума;
- подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям;
- подготовка к выполнению письменных контрольных работ;
- подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

1. Проработка теоретического материала лекционных занятий
Выполняется самостоятельно с использованием полных опубликованных текстов лекций (ссылки указаны в списке литературы) и иной рекомендованной литературы. Контроль выполняется в форме проведения ежемесячного письменного экспресс-опроса по понятиям, фактам, формулировкам, выполняемого в течение 15 минут на занятиях семинарского типа. Опросы включают по пять коротких вопросов и оцениваются дробными баллами от 0 до 5 (сумма баллов, полученных за ответ на каждый вопрос), а также итоговым двоичным показателем «зачтено»-«не зачтено». «Зачтено» соответствует полученным баллам от 3 и выше.

2. Подготовка к выполнению работ лабораторного практикума
Порядок подготовки и проведения. Лабораторный практикум включает ряд тем, освоение которых предполагает самостоятельное предварительное изучение студентами дополнительного теоретического материала, выходящего за пределы материала, представленного в лекциях.
Проведение лабораторного практикума включает две части: во-первых, семинарское обсуждение круга поставленных в работе проблем, обсуждение индивидуальных заданий; во-вторых, экспериментально-исследовательская часть, заканчивающаяся обсуждением и сопоставлением полученных результатов.
3. Темы лабораторного практикума:
Лабораторный практикум 1. Поиск оптимальных путей на графах с векторными весами.
Лабораторный практикум 2. Использование условий оптимальности для численного решения задач математического программирования с использованием математических пакетов.

Лабораторный практикум 3. Исследование методов безусловной локальной оптимизации в программной лаборатории LocOpt.
Лабораторный практикум 4. Исследование метода штрафов в программной лаборатории LocOpt.
Лабораторный практикум 5. Экспериментальное исследование методов многоэкстремальной оптимизации.
4. Методические материалы для самостоятельной работы по темам 1-5 лабораторного практикума указаны в списке литературы, а также приведены ниже:
a. Изданный в электронном виде курс лекций по нелинейному математическому программированию (указан в списке литературы);
b. Городецкий С.Ю. «Лабораторный практикум по методам локальной оптимизации в программной системе LocOpt». Электронный ресурс – размещен на https://source.unn.ru/#/teacher/2023/1;
c. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Учебное пособие. Н. Новгород: изд. ННГУ, 2007.

5. Способы, средства и порядок контроля:
Контроль самостоятельной работы студентов при подготовке теоретической части лабораторных практикумов выполняется в форме устного опроса-беседы-допуска по необходимой теории, проводимого в начале каждого занятия по лабораторному практикуму. Шкала оценивания троичная: «не зачтено», «зачтено условно», «зачтено». В первых двух случаях, студенты получают дополнительные индивидуальные теоретические задания различного объема и должны отчитаться по их выполнению письменно.

6. Подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям
Домашние задания выдаются по имеющемуся задачнику, который включает краткий теоретический материал и примеры решения задач из каждого раздела (обновляемые текущие версии задачника выкладываются для студентов на source.unn.ru).
Проверка выполнения домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия. Используется три формы контроля: – заполнение листа самооценки степени выполнения каждого из домашних заданий; – выборочная проверка выполнения заданий у двух-трех человек из группы; – проверка в форме коллективного обсуждения у доски результатов выполнения отдельных заданий одним или двумя студентами.
7. Подготовка к выполнению письменных контрольных работ
В течение семестра проводится две аудиторные и две домашние контрольные работы по материалам разделов лекционного курса: 1; 2-3-4; 6; 7.
Для подготовки к контрольным работам рекомендуется повторно прочитать теоретические разделы в задачнике, указанном в п.6, просмотреть полезные разделы в соответствующих источниках из списка рекомендованной литературы (раздел 6), а также самостоятельно решать несколько задач по теме контрольной работы из указанного задачника.
8. Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена
В качестве методических материалов при подготовке к экзамену рекомендуется использовать собственные конспекты лекций, а также источники, рекомендованные в списке литературы, среди которых представлены ссылки на электронные версии опубликованных полных текстов лекций. Ниже в форме таблицы приведен список контрольных вопросов по проверке освоения компетенции ПК-4, который рекомендуется использовать при подготовке к промежуточной

аттестации в форме экзамена.

9. Список контрольных вопросов к экзамену.
Раздел 1.
Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и глобально-оптимального решений.
Обобщение понятий оптимальности на многокритериальные задачи оптимизации. Решения оптимальные по Парето и Слейтеру (эффективные и полуэффективные решения).
Методы линейной свертки и свертки Гермейера, их основные свойства.
Задачи динамического программирования с фиксированным временем начала и окончания. Постановка.
Понятие функции Беллмана (определение) при решении «от начала», а также «от конца». Метод рекуррентных уравнений Беллмана (вывод и применение).
Принцип Беллмана как необходимое условие (с доказательством для аддитивного критерия) и как достаточное условие (с доказательством) для в задачах с аддитивным критерием и критерием в виде максимума. Связь принципа Беллмана с уравнениями Беллмана.
Обратные рекуррентные соотношения Беллмана (запись от начала процесса).
Пример использования соотношений Беллмана (решение задачи об оптимальном распределении с функцией дохода в виде квадратного корня).
Постановка задачи динамического программирования с нефиксированной длительностью процесса, отличия от постановки с фиксированным временем окончания.
Обобщение уравнений Беллмана на задачи с нефиксированной длительностью процесса. Применение к задачам поиска оптимальных путей на графах.
Задачи поиска оптимальных путей на графах с неотрицательными весами ребер: метод Дейкстры с доказательством оптимальности построенных им путей (по материалам лабораторной работы), связь метода Дейкстры с принципом Беллмана в форме достаточного условия.
Задачи на графах с векторными весами ребер. Отыскание оптимальных по Парето и Слейтеру решений методом сверток, согласование вида свертки с видом критерия.
Раздел 2.
Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции.
Отделимость точки и множества, строгая и сильная отделимость, геометрический смысл понятия отделимости, две теоремы об отделимости.
Свойства выпуклых функций (с доказательствами, кроме свойства непрерывности во внутренних точках), включая два критерия выпуклости.
Задача выпуклого математического программирования и ее свойства.
Возможность отсечений подмножеств, не содержащих глобального минимума, по измерениям градиента в гладких выпуклых задачах (следствие критерия выпуклости дифференцируемых функций).
Градиент и производная по направлению, ее вычисление в случае дифференцируемости функции, свойства градиента.
Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма.
Задачи с ограничениями, функция Лагранжа. Определение понятия регулярности допустимого множества в точке и в целом.
Задачи с ограничениями-равенствами, теорема Лагранжа (метод множителей Лагранжа).

Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке для ограничений-равенств.
Геометрическая интерпретация условий оптимальности из теоремы Лагранжа.
Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой задачи, записанная через принцип минимума.
Теорема Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи, записанная через седловую точку функции Лагранжа.
Достаточное условие регулярности Слейтера.
Теорема о необходимых и достаточных условиях минимума в дифференциальной форме для класса выпуклых регулярных задач.
Геометрическая интерпретация условий оптимальности, записанных в градиентной форме для выпуклого регулярного случая. Геометрическая интерпретация ситуации $\lambda_i<0$ при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств.
Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для невыпуклых задач – условие оптимальности первого порядка.
Достаточное условие регулярности допустимого множества в точке в форме линейной независимости градиентов.
Геометрические примеры недостаточности условий первого порядка для существования локального минимума в невыпуклом случае.
Теорема о достаточных условиях первого порядка острого локального минимума в задачах с ограничениями (без доказательства).
Теорема о достаточных условиях второго порядка для строгого локального минимума в задачах с ограничениями (без доказательства).
Раздел 3.
Понятие метода поисковой оптимизации. Испытание и порядок испытания. Априорная и поисковая информация. Пассивные и последовательные алгоритмы.
Принцип наилучшего гарантированного результата. Оптимальные и –оптимальные алгоритмы. Одношаговая последовательная оптимальность.
Класс унимодальных функций, правило сокращения интервала по двум и по k измерениям.
Построение оптимальных и –оптимальных пассивных N–шаговых алгоритмов, их гарантированная эффективность.
Построение –оптимального последовательного N–шагового алгоритма (метод Фибоначчи).
Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения и два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.
Задачи поиска локального экстремума в задачах без ограничений. Общая структура итерационных методов локального поиска. Понятие порядка метода. Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорости сходимости (определения).
Два критерия выбора шагового множителя. Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации. «Аккуратный» одномерный поиск.
Простые методы многомерного локального поиска и их свойства: градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска, и метод Ньютона. Вывод итерационного соотношения метода Ньютона.
Теоремы сходимости для методов наискорейшего градиентного поиска и метода Ньютона.
Свойства метода наискорейшего градиентного поиска и метода Ньютона.
Методы прямого поиска на примере метода Хука-Дживса.
Общие представления об эффективных методах локальной оптимизации: алгоритм метода

Ньютона с регулировкой шага (например, по Армихо), модификация матрицы Гессе до положительной определенности на основе модифицированного преобразования Холесского.
Квазиньютоновское условие, квазиньютоновский метод Давидона-Флетчера-Пауэлла.
Понятие сопряженных направлений, понятие метода сопряженных направлений и его поведение на квадратичных строго выпуклых функциях, алгоритм метода сопряженных градиентов Флетчера–Ривса для квадратичных и неквадратичных функций.
Раздел 4.
Общие методы решения задач с ограничениями. Метод внешних штрафных функций, степенная функция штрафа. Влияние показателя степени на гладкость функции штрафа.
Теорема сходимости метода внешнего штрафа.
Оценки скорости сходимости метода внешнего степенного штрафа (без доказательства).
Раздел 5
Задачи многоэкстремальной оптимизации. Липшицевы функции и их свойства.
Метод Пиявского, теорема о свойствах.
Версия метода с использованием оценки константы Липшица. Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных.
Алгоритм информационно–статистического метода в сравнении с методом ломаных.
Многомерные многоэкстремальные задачи. Метод деления на три, теорема о свойствах.
Обобщение метода деления на три на задачи с ограничениями-неравенствами для случая непустого допустимого множества.
Раздел 6.
Постановка задачи оптимального управления. Понятия оптимального управления, областей управляемости и неуправляемости.
Функция Беллмана в задаче оптимального управления. Получение условий оптимальности в форме уравнения Беллмана для задачи оптимального управления.
Теорема о необходимых условиях оптимальности управления в форме принципа максимума Понтрягина, связь принципа максимума с уравнением Беллмана.
Линейные задачи на оптимальное быстродействие. Постановка, преобразование формы записи принципа максимума для этих задач, исходя из теоремы о принципе максимума для общей задачи.
Структура оптимального управления в линейных задачах на оптимальное быстродействие.
Условие общности положения. Теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности управления (достаточность — без доказательства).
Другие формы постановки задач оптимального управления, изменения формы принципа максимума: задача с фиксированным временем достижения. Задачи оптимального управления со скользящими концами, условие трансверсальности.
Раздел 7.
Простейшие задачи вариационного исчисления (с закрепленными, свободными и скользящими концами) — постановки задач.
Формализация понятия близости кривых. Понятие сильного и слабого локального экстремумов.
Метод вариации Лагранжа. Пробные функции, вариация кривой. Первая и вторая вариации функционала. Лемма о необходимых условиях локального экстремума в общей форме.
Экстремум и экстремаль функционала (определение экстремали). Основная лемма вариационного исчисления.
Вычисление первой вариации функционала для задач с закрепленными концами, задач со свободными концами, а также для задач со скользящими концами.

Вывод уравнения Эйлера и граничных условий как необходимых условий первого порядка для экстремума и как необходимых и достаточных условий для экстремалей в трех простейших задачах вариационного исчисления.
Естественные граничные условия и условия трансверсальности в задачах со свободными и скользящими концами. Их геометрический смысл.
Первые интегралы уравнения Эйлера.
Экстремали с изломами. Теорема Дюбуа-Реймона (без доказательства).
Вычисление второй вариации в предположении закрепленных концов. Необходимое условие второго порядка для минимума (максимума) функционала — условие Лежандра.
Вариационные задачи с ограничениями. Изопериметрическая задача, постановка.
Применение подхода Лагранжа. Теорема об условиях экстремума первого порядка в изопериметрических задачах.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Пример индивидуальных дополнительных вопросов собеседования по лабораторному практикуму 1.

1. Привести свой пример графа и постановки задачи с нарушением принципа Беллмана в форме необходимого условия.
2. Сформулировать принцип Беллмана в форме достаточного условия «с конца». Доказать для критерия типа максимума.
3. Доказать, что при строго положительных коэффициентах свертки решениями в методе линейной свертки будут являться только эффективные (оптимальные по Парето) пути.
4. Привести свой пример поэтапного выполнения метода Дейкстры для графа с 5-7 вершинами для критерия типа максимума. Подобрать пример, приводящий к изменению пометок ребер у некоторых вершин и останову вычислений до того, как все вершины приобретут постоянные метки.
5. В чем Вы видите связь метода Дейкстры с принципом Беллмана в форме достаточного условия?
6. Сформулируйте и обоснуйте известные Вам свойства свертки Гермейера.

Пример индивидуальных дополнительных вопросов собеседования по лабораторному практикуму 2 .

1. Дать определение регулярности области в точке. Привести свой пример области, порожденной гладкими неравенствами (для класса гладких задач), с нарушением регулярности в одной из точек (с обоснованием).
2. Привести пример допустимого множества, для которого существует допустимая точка, где ограничения–неравенства выполняются строго, а условие Слейтера применять нельзя. Проанализировать его доказательство и указать причину его неприменимости в Вашем случае.

3. Привести свой пример ситуации (для гладкого случая), когда точка удовлетворяет всем условиям Куна-Таккера, но не является локальным минимумом.

4.Как должны измениться условия оптимальности для гладких задач с неравенствами в задачах на максимум? Привести геометрическую иллюстрацию взаиморасположения векторов градиентов в соответствующем случае. Обосновать.

5. Доказать, что на классе гладких задач с невыпуклой целевой функцией и областью, удовлетворяющей достаточному условию регулярности Слейтера, это условие применимо при наличии гладкости ограничений. Т.е. требуется доказать это достаточное условие регулярности для измененного класса задач.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Студент понимает основную часть теоретического материала по теме собеседования, правильно отвечает более чем на 60% вопросов по теории, адекватно выполняет основную часть небольших практических заданий.
не зачтено	Студент слабо ориентируется в терминологии, неверно понимает и неправильно формулирует основные теоретические факты, не может выполнить значительную часть типовых практических заданий.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Практическое задание) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Практические задания по лабораторной работе 1

1. Изучить понятия решений в многокритериальных задачах, применительно к задачам поиска оптимальных путей на графах с векторными весами ребер.

2. Построить в программной системе OptWay примеры графов, имеющих порядка 10 оптимальных по Слейтеру путей, из которых 4–5 путей будут оптимальными по Парето.

3. Выполнить расчеты в системе OptWay по поиску оптимальных по Парето путей методами линейной свертки и свертки Гермейера, используя для решения скаляризованных задач метод Дейкстры и метод Беллмана. Оценить затраты по количеству операций сложения и сравнения при разных способах решения.

4. Доказать оптимальность путей, получаемых по методу Дейкстры в скаляризованной задаче.

5. Аналитически и геометрически обосновать основные свойства двух методов свертки.

Практические задания по лабораторной работе 2

1. Изучить терминологию и теорию по условиям оптимальности для невыпуклых задач математического программирования. Разобрать геометрическую интерпретацию выполнения условий оптимальности.

2. Для заданной невыпуклой двумерной задачи математического программирования с тремя ограничениями–неравенствами выполнить следующие исследования:

2.1. Используя математический пакет Matcad построить карту линий равного уровня целевой функции и структуру допустимого множества.

2.2. Исходя из геометрического вида задачи выполнить анализ регулярности допустимого множества в исследуемой задаче, а также сделать прогноз количества и положения точек, в которых выполняется необходимое условие Куна-Таккера.

2.3. Исходя из геометрической структуры задачи выделить среди найденных точек локальные минимумы, а также «ложные» точки.

2.4. Используя решатели математического пакета Matcad рассчитать положение точек Куна-Таккера по выполненным предварительным прогнозам их местоположения.

2.5. Применить к найденным точкам достаточные условия первого или второго порядков для локального минимума, а также необходимые условия второго порядка. Сформулировать выводы по результатам исследования задачи.

Практические задания по лабораторной работе 3

1. Изучить теоретический материал по прикладным методам многомерного локального поиска в задачах без ограничений. Подготовить краткие сообщения по их построению и свойствам.

2. С использование программной системы LocOpt выполнить сравнительное численное исследование группы методов локального поиска на наборе различных двумерных и многомерных задач.

3. Сделать выводы об относительной эффективности различных методов.

Практические задания по лабораторной работе 4

1. Изучить теорию по методу внешнего штрафа, включая условия сходимости и оценки скорости сходимости.

2. Построить в системе LocOpt свои двумерные примеры задач с ограничениями.

3. Изучить работу метода степенного внешнего штрафа на построенных задачах, используя средства визуализации программной системы LocOpt.

4. Исследовать влияние на работу метода штрафов показателя степени штрафа и стратегии настройки коэффициента штрафа.

Критерии оценивания (оценочное средство - Практическое задание)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Степень правильности и полноты выполнения практического задания по лабораторному практикуму не ниже 60-65%, при этом студент демонстрирует достаточное знание и адекватное понимание необходимых теоретических фактов.
не зачтено	Практическое задание выполнено менее, чем на 60%, при этом обнаружены значительные пробелы в знании и понимании необходимых теоретических фактов.

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

Пример типового задания для аудиторной контрольной работы 1:

ДП-1. Планируется производство на двух предприятиях в течение **N** лет. Сумма начальных средств в фонде развития, предназначенных для распределения равна **S**. Средства в размере **u**, выделенные **i**-му предприятию в начале очередного года, приносят за год доход $J_i(u)$,а также сумму $f_i(u)$, передаваемую в совместный фонд развития для дальнейшего финансирования производства. Средства выделяются предприятиям суммами, кратными величине **d** так, что средства фонда полностью делятся между предприятиями, за исключением сумм, меньших **d** (эти последние суммы теряются). В начале каждого следующего года средства, переданные в фонд, объединяются и заново делятся. Необходимо добиться максимального суммарного совокупного дохода, образованного из значений функций **J**, за счет выбора стратегии перераспределения средств.

Поставить задачу в форме задачи динамического программирования, записать вид рекуррентных уравнений Беллмана для произвольного N/ Выполнить расчеты при следующих данных: **N=3, S=120,** $f_1(u)=0.4u$, $f_2(u)=0.6u$, **d=20.**

u		20	40	60	80	100	120
J 1(u)		5	8	12	14	15	16
J 2(u)		3	5	8	12	14	15

Пример типового задания для аудиторной контрольной работы 2 (включает три задачи МП-1, МП-2, МП-3):

МП-1. Определить тип задачи, выяснить регулярность области.

Найти решение.

min x^2 + (1/2)*y^2 + z^2 + (x + y)*z -2*x - z

7 + y + z >= 0

x + z >= 5

2*x + y + z + 1 >= 0

4*z - x >= 10

x + y + 2*z = 1

МП-2. Построить (в геометрической форме представления) пример гладкой задачи с ограничениями-равенствами, где существует точка, удовлетворяющая условиям Лагранжа, но не являющаяся ни локальным минимумом, ни максимумом.

МП-3. Будет ли на классе гладких задач регулярно допустимое множество в виде полосы шириной 2*R? из которой вырезан вписанный в нее круг радиуса R? Привести обоснование ответа.

Пример типовых заданий для домашней контрольной работы 3

ОУ-1. Найти область управляемости и осуществить синтез оптимальных управлений в задачах о быстрейшем попадании в начало координат для линейной системы

$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = u(t)$, где $-1 \le u(t) \le +1$, в следующих случаях:

(a) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; (b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$; (c) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$;

(d) $Re\,\lambda_1 > 0,\ Re\,\lambda_2 < 0$; (e) $Re\,\lambda_1 > 0,\ Re\,\lambda_2 > 0$.

Здесь через лямбда обозначены корни характеристического полинома. При решении задач (a)–(e) самостоятельно выбрать значения коэффициентов *h* и *k* при которых будут обеспечены указанные варианты типы значений корней характеристического полинома.

Пример типовых заданий для контрольной работы 4

ВИ-1. Найти экстремали функционалов, выяснить, может ли на этих экстремалях достигаться минимум (максимум) функционала:

a $I[y(\cdot)] = \int_1^{\ell}(xy'^2 + yy')dx\,; y(1) = 0, y(\ell) = 1.$

b $I[y(\cdot)] = \int_a^b(2xy + (x^2 + e^y)y')dx\,; y(a) = A, y(b) = B.$

c $I[y(\cdot)] = \int_0^1(e^y + xy')dx\,; y(0) = 0, y(1) = a.$

d $I[y(\cdot)] = \int_0^{\pi}(y'^2 - y^2)dx\,; y(0) = 1, y(\pi) = -1.$

e $I[y(\cdot)] = \int_0^1(2e^y - y^2)dx\,; y(0) = 1, y(1) = e.$

f $I[y(\cdot)] = \int_0^{x_1}(1 + x)y'^2dx\,, y(0) = 0, y(x_1) + x_1 = 2.$

ВИ-2. Найти решение изопериметрической задачи:

$$\boldsymbol{I[y(\cdot)] = \int_0^{\ell}(y')^2dx\,; y(0) = y(\ell) = 0},\ \int_0^{\ell} y^2dx = 1.$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все предложенные задачи решены, применены оригинальные и короткие способы решения с необходимым обоснованием, решения задач доведены до правильных ответов.
отлично	Предложенные задачи решены, решения имеют необходимые обоснования, задачи доведены до ответов, в которых могут присутствовать незначительные погрешности.
очень хорошо	Предложенные задачи в основном решены (около 80-85%), хотя и с незначительными погрешностями, решения в основном обоснованы, но не полностью.
хорошо	Почти все предложенные задачи во многом решены, но решения не везде доведены до верного ответа. Степень выполнения заданий не ниже 60%.
удовлетворительно	Доля правильности выполнения заданий ниже 55-60%, решения приводятся без надлежащего теоретического обоснования.
неудовлетворительно	Степень выполнения заданий ниже 30%, демонстрируется низкий уровень знания теории.
плохо	Обнаружены существенные пробелы в понимании материала. Степень выполнения заданий ниже 10%.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	**превосходно**	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой

	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	**неудовлетворительно**	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Разноуровневые задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4

Процедура промежуточной аттестации в форме экзамена включает несколько разноуровневых инструментов: короткие тестовые вопросы для решения вопроса о допуске к экзамену; билеты-тесты, включающие до пяти коротких вопросов по теории с приложенными микрозаданиями (для сдачи на уровне не выше "удовлетворительно"); практические задания – задачи; билеты для ответов с проведением доказательств (для получения оценки "хорошо" и выше).

Ниже приведены примеры типовых заданий указанных типов.

1. Типовые образцы тестовых заданий в качестве допуска к основной части экзамена (используются тестовые вопросы, предполагающие свободный ответ):

01a. Какая функция называется функцией Беллмана Sk(x) , смысл ее аргумента? 01b. Дайте определение выпуклого множества. Выпукло ли пустое множество? 01c. Дайте определение производной функции по направлению и формулу ее вычисления через градиент. 01d. Чем определяется порядок вычислительного метода оптимизации? Приведите примеры методов первого и второго порядка. 01e. Постановка задачи вариационного исчисления со свободными концами. Укажите требования к классу допустимых кривых.
02a. Дайте определение решения, оптимального по Парето. Поясните картинкой. 02b. Дайте определение проекции точки на множество . Картинка-пример. Первая лемма о проекции. 02c. Определите множество направлений строгого локального убывания функции Q в точке z, если ее градиент в этой точке равен (1; -3). 02d. Назовите составляющие понятия вычислительного метода оптимизации. Укажите эти составляющие на примере метода наискорейшего градиентного поиска. 02e. Что называют первой вариацией функционала, экстремалью? Вид первой вариации при закрепленных концах.

2. Типовые образцы билетов-тестов для оценивания владения компетенцией ПК-4 до уровня, соответствующего оценке «удовлетворительно».

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Кафедра *ТУиДС* *Дисциплина* *Методы оптимизации – ПМИ*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ-ТЕСТ № **1**

1. Постановка задачи динамического программирования с фиксированной длительностью процесса. Определение функции Беллмана $S_k(x)$ при решении «от конца», смысл ее аргумента и индекса.
2. Определение решений, оптимальных по Парето (эффективных решений). Метод свертки Гермейера. Геометрическая интерпретация. При каких значениях коэффициентов свертки Гермейера будет выделено решение (4;2), если оно эффективно?
3. Метод внешних штрафных функций – описание применения с геометрической иллюстрацией. Влияние показателя степени в степенном штрафе на гладкость функции штрафа. Как влияет наличие и порядок гладкости на применение метода?
4. Достаточное условие регулярности в форме линейной независимости (с доказательством). Приведите геометрическую иллюстрацию случая нарушения этих достаточных условий в плоской задаче с двумя неравенствами.
5. Необходимые условия минимума в простейшей задаче вариационного исчисления со свободными концами.

Зав. кафедрой ____________________________

Экзаменатор ______________________________

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Кафедра *ТУиДС* *Дисциплина* *Методы оптимизации – ПМИ*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ-ТЕСТ № **2**

1. Общий вид рекуррентных уравнений Беллмана при записи «от начала» с пояснением всех обозначений.
2. Критерий выпуклости дифференцируемой функции (с доказательством). Используя критерий, записать вид множества точек , среди которых не может содержаться глобальный минимум выпуклой Q, если градиент функции в точке (0; 0) равен (1; 1).
3. Формулировка теоремы Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме (выпуклый случаи). Привести геометрическую иллюстрацию выполнения условий в задаче min x1^2 + x2^2, при ограничениях x2 + x1–1=0, x2 ≤ x1–1.
4. Определение унимодальной функции. Правило сокращения интервала при поиске минимума. Формула гарантированной эффективности после N измерений. Перечень последовательных алгоритмов в таких задачах с указанием их гарантированных эффективностей.
5. Постановка линейной задачи на оптимальное быстродействие. Какие требования накладываются на класс допустимых управлений? Теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности управления.

Зав. кафедрой ____________________________

Экзаменатор ______________________________

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Кафедра *ТУиДС* *Дисциплина* *Методы оптимизации – ПМИ*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ-ТЕСТ № **3**

1. Определение функции Беллмана $Z_k(x)$ при решении «от начала». Общий вид рекуррентного

уравнения Беллмана при записи «от начала» с пояснением всех обозначений.

2. Определение строго выпуклой функции. Геометрическая иллюстрация определения с подписями на рисунке. Что можно сказать о выпуклости на выпуклом множестве D суммы вида $C_1 f_1(x) + ... + C_m f_m(x)$, если все функции $f_k(x)$ выпуклы на D?
3. Производная по направлению, ее вычисление для дифференцируемой функции. Теорема Ферма (с доказательством).
4. Постановка задачи оптимального управления. Какие требования накладываются на оптимальное управление в теореме о принципе максимума Понтрягина?
5. Вид итерационной формулы метода Ньютона и геометрическая иллюстрация принципа выбора новой точки. Условия, обеспечивающие сверхлинейную сходимость метода. Что можно сказать про область сходимости?

Зав. кафедрой ___________________________

Экзаменатор ____________________________

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Кафедра ______*ТУиДС*________ Дисциплина _*Методы оптимизации – ПМИ*_

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ-ТЕСТ № **4**

1. Алгоритм метода Дейкстры, условия применимости. Что характеризует значение временной метки вершины в методе Дейкстры (т.е. каков содержательный смысл величины этой метки)?
2. Определение отделимости точки и множества, строгая и сильная отделимость. Первая теорема об отделимости (с доказательством). Является ли строго отделимым центр тяжести треугольника от множества его вершин?
3. Теорема Куна-Таккера в терминах седловой точки (описание класса задач и формулировка). Можно ли сделать вывод о выпуклости функции Q(x) в R^N, если для любого C множества $\{x: Q(x) \le C\}$ выпуклы?
4. Правило сокращения интервала. Гарантированная неопределенность после N измерений. Оптимальные и ϵ-оптимальные пассивные N–шаговые алгоритмы для унимодальных функций (с объяснением).
5. Какая кривая называется сильным локальным минимумом функционала в простейшей задаче вариационного исчисления? Какое значение имеет анализ знака второй частной производной от подынтегральной функции по производной от зависимой переменной при решении простейших задач вариационного исчисления?

Зав. кафедрой ___________________________

Экзаменатор ____________________________

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Кафедра ______*ТУиДС*________ Дисциплина _*Методы оптимизации – ПМИ*_

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ-ТЕСТ № **5**

1. Постановка задачи динамического программирования с нефиксированной длительностью процесса. Вид обобщенного уравнения Беллмана для этих задач.
2. Алгоритм метода Фибоначчи. Формула для его гарантированной эффективности.
3. Общая структура итерационных методов локального поиска. Два критерия выбора шагового множителя. Геометрическая интерпретация критерия существенности убывания целевой функции.
4. Определение функции, липшицевой на множестве D. Является ли липшицевой на D = [0, 1] функция корня квадратного от x? Метод Пиявского – описание алгоритма. Демонстрация применения.
5. Определение первой вариации. Вывод вида первой вариации функционала для задач с закрепленными

концами.

Зав. кафедрой ___________________________

Экзаменатор ____________________________

3. Типовые примеры задач, применяемых в качестве средства контроля на промежуточной аттестации в форме экзамена:

3.1. Задача из раздела «оптимальное управление»

Судно массы совершает поступательное одномерное движение под действием двигателя, развивающего усилие , и испытывает сопротивление со стороны окружающей воды, равное скорости движения с обратным знаком. Усилие, развиваемое двигателем, ограничено по величине: . Решить задачу синтеза управления, мягко (с нулевой скоростью) приводящего судно в точку с координатой 0 за минимальное время. Точка причаливания находится на прямой, вдоль которой перемещается судно.

3.2. Задача из раздела «оптимальное управление»

Построить область управляемости и синтезировать оптимальное по быстродействию управление в начало координат для управляемой динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u(t)$ где вектор u(t) принимает значение на отрезке, соединяющем точки (–1, –2) и (1, 2)

3.3. Задача из раздела «условия оптимальности в задачах математического программирования»

Выполнить анализ типа задачи, найти глобальный минимум:

$$\begin{aligned} &min \quad 30y - 18xy - 10x + 11(x^2 + y^2) \\ &1 + y \geq 0 \\ &x - 4y \leq -5 \\ &3x - y \leq -4 \end{aligned}$$

3.4. Задача из раздела «вариационное исчисление»

Найти экстремали в изопериметрической задаче на минимум функционала $min \int_0^{\pi} x\, sin(t)dt$ при ограничениях $x(0) = 0,\ x(\pi) = \pi$ и дополнительном условии $\int_0^{\pi} \dot{x}(t)dt = 3\pi$.

4. Образцы типовых билетов для промежуточной аттестации в форме экзамена (проверка компетенции ПК-4):

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт Информационных технологий, математики и механики
Кафедра теории управления и динамики систем
Дисциплина «Методы оптимизации»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № **1**

1. Теорема Каруша–Куна–Таккера в дифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи. Геометрическая интерпретация получения отрицательного значения множителя Лагранжа в разложении антиградиента целевой функции для выпуклой задачи при неверной гипотезе о наборе активных ограничений–неравенств.
2. Пример использования уравнений Беллмана в задаче об оптимальном распределении ресурса с функциями эффективности вида $ak(uk)^{0.5}$

Зав. кафедрой ___________________________
Экзаменатор ____________________________

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт Информационных технологий, математики и механики
Кафедра теории управления и динамики систем
Дисциплина «Методы оптимизации»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № **2**

1. Понятие отделимости множества и точки. Первая теорема об отделимости.
2. Вывод необходимых условий экстремума первого порядка в простейшей задаче вариационного исчисления с закрепленными концами (включая вывод формулы для первой вариации применительно к задаче этого типа).

Зав. кафедрой ___________________________
Экзаменатор ____________________________

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт Информационных технологий, математики и механики
Кафедра теории управления и динамики систем
Дисциплина «Методы оптимизации»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № **3**

1. Понятие выпуклой, строго выпуклой функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.
2. Понятие экстремума и экстремали в задачах вариационного исчисления. Вторая вариация. Теорема Лежандра и ее роль в решении вариационных задач.

Зав. кафедрой ___________________________
Экзаменатор ____________________________

Критерии оценивания (оценочное средство - Разноуровневые задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент продемонстрировал свободное владение теоретическим материалом, способность к решению практических задач, умение обосновывать ранее неизвестные ему факты из теории, несколько выходящие за рамки стандартного материала дисциплины.

Оценка	Критерии оценивания
отлично	Студент ответил на вопросы билета–теста с микро-заданиями на уровне выше 90%, решил предложенные практические задачи, смог провести требуемые доказательства по вопросам билета, но не владеет материалом свободно.
очень хорошо	Студент ответил на вопросы билета–теста с микро-заданиями на уровне выше 70%, решил с некоторыми ошибками предложенные практические задачи, смог провести требуемое доказательство по одному из вопросов билета.
хорошо	Студент ответил на вопросы билета–теста с микро-заданиями на уровне выше 60-70%, в целом решил с незначительными ошибками предложенные практические задачи, смог провести часть доказательств, требуемых по билету.
удовлетворительно	Студент ответил на вопросы билета–теста с микро-заданиями на уровне выше 50%, решил с заметными погрешностями одну из предложенных практических задач, но не смог ответить на вопросы билета по доказательствам предложенных теоретических фактов.
неудовлетворительно	Студент имеет не зачтенные контрольные работы в семестре, на низком уровне ответил на вопросы теста по допуску к экзамену, не смог решить предложенную типовую практическую задачу или ответил на вопросы предложенного билета–теста с микро-заданиями на уровне ниже 40-50%
плохо	Студент имеет существенные задолженности по результатам лабораторного практикума и контрольным работам в семестре и не смог ответить на основные вопросы из тестового комплекта вопросов по допуску к экзамену.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Городецкий Станислав Юрьевич. Лекции по нелинейному математическому программированию : учебно-методическое пособие / С. Ю. Городецкий ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2020. - 173 с. - Текст : электронный., https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=794639&idb=0.
2. Городецкий Станислав Юрьевич. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению : учебно-методическое пособие / С. Ю. Городецкий ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2020. - 51 с. - Текст : электронный., https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=794640&idb=0.
3. Васильев Федор Павлович. Численные методы решения экстремальных задач : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Приклад. математика". - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Наука, 1988. - 549 с. : ил. - ISBN 5-02-013796-0 (в пер.) : 1.60., 178 экз.
4. Городецкий С. Ю. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород :

Изд-во ННГУ, 2007. - 489 с. - (Модели и методы конечномерной оптимизации ; вып. 2). - ISBN 978-5-85746-987-3 : 90.00., 82 экз.
5. Карманов Владимир Георгиевич. Математическое программирование : [учеб. пособие для вузов по специальности "Прикладная математика"]. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1986. - 286, [1] с. : граф. - 0.80., 127 экз.
6. Гельфанд Израиль Моисеевич. Вариационное исчисление : учебник для ун-тов. - М. : Физматгиз, 1961. - 228 с. : черт. - 0.47., 17 экз.
7. Краснов Михаил Леонтьевич. Вариационное исчисление : [учеб. пособие для втузов]. - М. : Наука, 1973. - 191 с. : с черт. - (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Задачи и упражнения). - 0.34., 26 экз.

Дополнительная литература:

1. Гилл Филип. Практическая оптимизация / пер. с англ. В. Ю. Лебедева ; под ред. А. А. Петрова. - М. : Мир, 1985. - 509 с. : ил. - 2.70., 32 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Издания, доступные в электронной форме:
1. Бирюков Р.С., Городецкий С.Ю., Губина Е.В., Савельев В.П. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие. Нижний Новгород: ННГУ, 2024. – 142 с. Электронный ресурс: размещен на https://source.unn.ru/#/teacher/2024/1.
2. Городецкий С.Ю. Поиск оптимальных путей на графах с векторными весами ребер. Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: ННГУ, 2024. – 38 с. Электронный ресурс: размещено в ФОЭР ННГУ. URL: https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=919568&idb=0.
3. Городецкий С.Ю. Лабораторный практикум по методам локальной оптимизации в программной системе LocOpt. Электронный ресурс: размещен на https://source.unn.ru/#/teacher/2024/1.
4. Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации [Электронный ресурс]: монография / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2008. — 320 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2184 — доступ через ЭБС ЛАНЬ по подписке с компьютеров ННГУ.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики,т.1, – М.:ГИТТЛ,1951. — В форме электронного документа доступна на сайте EdWorld «Мир математических уравнений», ИПМ РАН, 2004-2016, URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm – доступ свободный.
6. EqWorld. Мир математических уравнений / Разработчик – А. Д. Полянин. – М.: ИПМ РАН, 2004-2014. Электронный ресурс, содержащий электронные версии книг по вариационному исчислению в свободном доступе: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm – доступ свободный.
7. Электронная библиотечная система «Издательство Лань», 2016, URL: https://e.lanbook.com — доступ по подписке ННГУ с компьютеров ННГУ.
8. Современная цифровая образовательная среда РФ. [сайт]. Учебные курсы. URL: https://online.edu.ru/public/courses?faces-redirect=true
Программное обеспечение:
1. Для поддержки курса разработаны компьютерные программные лаборатории «OptWay» и «LocOpt», установленные в учебном компьютерном классе лаборатории «Динамика и оптимизация» кафедры ТУиДС (ауд. 217, корп.2).

2. При проведении лабораторных работ используются математические пакеты общего назначения, преимущественно MatCad v 14 или MatLab. Используемое программное обеспечение является лицензионным.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Городецкий Станислав Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Ломакина Любовь Сергеевна, д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева.

Заведующий кафедрой: Осипов Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № №6.