

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
президиумом Ученого совета ННГУ
от 14.12.2021 г. протокол № 4

Рабочая программа дисциплины

Теория групп

Уровень высшего образования
специалитет

Направление подготовки / специальность
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная механика и приложения

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2022 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений

| № варианта | Место дисциплины в учебном плане образовательной программы | Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД |
|------------|---|--|
| 2 | Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений | Дисциплина Б1.В.ДВ.01.02, «Теория групп» относится к части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений. |

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции) | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства |
|--|--|--|--|
| | Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора) | Результаты обучения по дисциплине** | |
| ПК-11. Умение использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование | <p>ПК-11.1. Знает теоретические основы физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике.</p> <p>ПК-11.2. Умеет использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование для решения задач механики на основе полученных теоретических знаний.</p> <p>ПК-11.3. Имеет практический опыт использования физических и компьютерных моделей и экспериментального оборудования при решении стандартных задач механики.</p> | <p><i>Знает теоретические основы физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике. Знает основные подходы и методы построения решений задач групповой структуры. Уметь анализировать и владеть основными алгоритмами теории групп для решения поставленных задач.</i></p> <p><i>Обладает практическим опытом компьютерными методами теории групп.</i></p> | Собеседование Разноуровневые задачи и задания Контрольная работа |

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

| | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| | очная форма обучения |
| Общая трудоемкость | <u>3</u> ЗЕТ |
| Часов по учебному плану | 108 |
| в том числе | |
| аудиторные занятия (контактная | |

| | |
|---|----|
| работа): | |
| - занятия лекционного типа | 32 |
| - занятия семинарского типа | 32 |
| самостоятельная работа | 43 |
| текущий контроль (КСР) | 1 |
| Промежуточная аттестация – зачет | |

3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины | Всего (часы) | В том числе | | | | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|---|--------------|---|---------------------------|----------------------------|-------|---|
| | | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них | | | | |
| | | Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего | |
| Группы. Определение группы, подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Гомоморфизмы групп. Ядро, образ гомоморфизма. Смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах групп. | 20 | 6 | 6 | | 12 | 7 |
| Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы. Формула длины орбиты. Формула разложения на орбиты. Классы сопряженных элементов, формула классов. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Центр группы. | 18 | 6 | 6 | | 12 | 8 |
| р-группы, разрешимые и простые группы. р-группы. Теоремы Силова. Группы порядка p^q . Коммутант группы. Разрешимые и простые группы. | 20 | 6 | 6 | | 12 | 6 |
| Задание группы образующими и соотношениями. Внешнее, внутреннее прямое произведение групп. Разложимые группы. Разложимость конечной циклической группы. Свободные группы. Универсальное свойство свободной группы. Задание группы образующими и соотношениями. | 21 | 6 | 6 | | 12 | 10 |
| Конечные и конечнопорожденные абелевы группы. Конечные абелевы группы. Примарные группы. Элементарные делители примарной группы. Число неизоморфных примарных групп порядка p^n . Коэффициенты кручения конечной абелевой группы. | 28 | 8 | 8 | | 16 | 12 |

| | | | | | | |
|--|------------|-----------|-----------|--|-----------|-----------|
| Конечнопорожденные абелевы группы. Свободные абелевы группы. Ранг свободной абелевой группы. Подгруппа кручения. Коэффициенты кручения конечнопорожденной абелевой группы. | | | | | | |
| Текущий контроль (КСР) | 1 | | | | | |
| Промежуточная аттестация зачет | | | | | | |
| Итого | 108 | 32 | 32 | | 64 | 43 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в форме зачета.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Изучение литературы и проработка теоретического материала лекционных занятий.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Хорева Н.А., Чебочко Н.Г. "ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ I.". Практикум. 2010, ФЭОР. – URL: http://www.unn.ru/books/met_files/teor_gr.pdf
2. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Чебочко Н.Г. Задачи по теории групп. Ч. II. Практикум. 2015. ФЭОР. – URL: http://www.unn.ru/books/met_files/mulyar.pdf
3. Кузнецов М.И. "ЗАДАНИЕ ГРУПП ОБРАЗУЮЩИМИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ". Учебно-методическое пособие. 2014 ФЭОР. – URL: http://www.unn.ru/books/met_files/generators.pdf.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | Шкала оценивания сформированности компетенций | | | | | | |
|--|--|---|--|--|--|--|--------------------------|
| | плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
| | Не зачтено | | зачтено | | | | |
| <u>Знания</u> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможнос | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе | Уровень знаний в объеме, |

| | | | | | | | |
|---------------|--|--|--|---|---|---|---|
| | ть оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | грубые ошибки. | негрубых ошибки. | Допущено несколько негрубых ошибок | Допущено несколько несущественных ошибок | подготовки, без ошибок. | превышающую программу подготовки. |
| <u>Умения</u> | Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u> | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки. | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов. | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка | | Уровень подготовки |
|---------|--------------|--|
| зачтено | Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| | Отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| | Очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| | Хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не |

| | | |
|------------|---------------------|--|
| | | ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |
| | Удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| | Плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

5.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

5.2.1 Контрольные вопросы

| вопросы | Код формируемой компетенции |
|--|-----------------------------|
| 1. Бинарная алгебраическая операция. Примеры. Теорема об обобщенной ассоциативности. | ПК-11 |
| 2. Определение группы, подгруппы. Эквивалентное определение подгруппы. Примеры. | ПК-11 |
| 3. Степени, свойства степеней. Порядок элемента. Свойства порядка. | ПК-11 |
| 4. Циклические группы. Теорема о порядке элемента и циклической подгруппы порожденной этим элементом. Следствия. | ПК-11 |
| 5. Теорема об изоморфизме циклических групп. | ПК-11 |
| 6. Теорема о подгруппах циклической группы. | ПК-11 |
| 7. Гомоморфизмы групп. Примеры. Свойства гомоморфизмов групп. Ядро, образ гомоморфизма. Изоморфизм групп. | ПК-11 |
| 8. Смежные классы по подгруппе (левые, правые). Примеры. | ПК-11 |
| 9. Индекс группы по подгруппе. Теорема Лагранжа, следствия. | ПК-11 |
| 10. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Каноническая проекция. Примеры. | ПК-11 |
| 11. Основная теорема о гомоморфизме. Следствие. | ПК-11 |
| 12. 1-ая теорема об изоморфизме. | ПК-11 |
| 13. Теорема о соответствии. Следствия. | ПК-11 |
| 14. Действие групп на множестве. Примеры. Эквивалентность определений действия групп на множестве. | ПК-11 |

| | |
|--|--------------|
| 15. Орбиты, стабилизаторы. Примеры. Сопряженность стабилизаторов элементов из одной орбиты. | <i>ПК-11</i> |
| 16. Предложение о соответствии между элементами орбиты и множеством левых смежных классов по подгруппе. Формула длины орбиты. | <i>ПК-11</i> |
| 17. Формула разложения на орбиты. Формула классов. | <i>ПК-11</i> |
| 18. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Теорема Кэли. | <i>ПК-11</i> |
| 19. Центр группы. Примеры. Свойства. Теорема о центре p -группы. | <i>ПК-11</i> |
| 20. Порядки элементов в абелевой группе. Лемма о показателе. | <i>ПК-11</i> |
| 21. Теорема Коши. Силовские подгруппы. Теоремы Силова. Следствие. | <i>ПК-11</i> |
| 22. Свойства коммутанта. Примеры. | <i>ПК-11</i> |
| 23. Разрешимые группы. Примеры. Свойства разрешимых групп. | <i>ПК-11</i> |
| 24. Теорема о разрешимости p -группы. Группа порядка p^2 . | <i>ПК-11</i> |
| 25. Внешнее, внутреннее прямое произведение. Теорема об эквивалентности определений внутреннего произведения групп. | <i>ПК-11</i> |
| 26. Теорема о порядке произведения. | <i>ПК-11</i> |
| 27. Следствие теоремы о порядке произведения. Теорема о разложимости циклической группы. | <i>ПК-11</i> |
| 28. Теорема о разложении группы в прямую сумму силовских нормальных подгрупп. | <i>ПК-11</i> |
| 29. Теорема о факторгруппе произведения. | <i>ПК-11</i> |
| 30. Абелевы группы. Примарная подгруппа. Теорема о разложении в прямую сумму примарных подгрупп. | <i>ПК-11</i> |
| 31. Лемма о представителе. Теорема о разложении примарной группы. | <i>ПК-11</i> |
| 32. Теорема о единственности разложения примарной группы. | <i>ПК-11</i> |
| 33. Элементарные делители примарной группы. Теорема об изоморфизме примарных групп. Число неизоморфных примарных групп порядка p^n . | <i>ПК-11</i> |
| 34. Коэффициенты кручения. Основная теорема о конечных абелевых группах. | <i>ПК-11</i> |

5.2.2 Типовые задания для оценки сформированности компетенции ПК-11

1. В циклической группе порядка 20 найти все элементы a , такие что $a^4 = e$ и все элементы порядка 4.

2. Найти классы сопряженных элементов в группе A_4 .

3. Выяснить какие из перечисленных циклических групп $\langle a \rangle$, порожденных элементом $a \in G$, изоморфны:

1) $G = \mathbb{C}^*$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$;

2) $G = \mathbb{C}^*$, $a = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$;

3) $G = \mathbb{R}^*$, $a = -3\pi$;

4) $G = \mathbb{C}^*$, $a = 7 - i$;

5) $G = S_6$, $a = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)$;

6) $G = \mathbb{Z}$, $a = -310$;

7) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти все силовские 3-подгруппы в S_4 .

5. Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$.

6. Определить является отображение $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ гомоморфизмом групп или нет, найти ядро и образ:

a) $f(z) = |\bar{z}|^2$;

в) $f(z) = -|z|$;

с) $f(z) = 1$;

d) $f(z) = 3$.

7. Доказать изоморфизм $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^+ \cong T^1$.

8. Найти централизатор подстановки $(1\ 4\ 2)$ в S_4 .

9. Выяснить является множество с операцией группой или нет.

10. В группе $GL_2(\mathbb{R})$ найти централизатор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Найти все гомоморфные отображения $\mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_{36}$.

12. Доказать, что группа $G = \langle a, b \mid a^8, b^2 a^2, b^{-1} a b a \rangle$ конечна.

13. Доказать, что группу S_3 можно задать следующими образующими и соотношениями:

$$\langle a, b \mid a^2, b^3, a^{-1} b a b^{-2} \rangle.$$

14. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.

15. Найти левые и правые смежные классы в S_3 по подгруппе $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
16. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.
17. Изоморфны ли группы: $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{24}$?
18. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.
19. Доказать, что не существует простых групп порядка 80.
20. Найти количество элементов заданного порядка в заданной группе.
21. Найти все орбиты и стабилизаторы группы G , порожденной подстановкой
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$
- и действующей на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
22. Найти все подгруппы циклической группы порядка 36.
23. Найти нормальные подгруппы в S_4 .
24. Найти порядок элемента $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$.
25. Доказать изоморфизм $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1. Кострикин А. И. - Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2004. (В библиотеке ННГУ более 50 экз.)
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2003. (В библиотеке ННГУ более 100 экз.)

б) Дополнительная литература:

1. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. (В библиотеке ННГУ более 30 экз.)
2. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. - Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. 2001, 2007, 2008 (В библиотеке ННГУ более 100 экз.)

в) Интернет-ресурсы

<http://www.lib.unn.ru/>

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Автор (ы): к.ф.-м.н., доц. _____ Любимцев О.В.

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф _____ Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики
от 01.12.2021 года, протокол № 2.