

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«31» мая 2023 г. № 6

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Дискретная математика

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Направленность образовательной программы

Информационные системы и технологии

Квалификация (степень)

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Нижний Новгород

2023 год

1. Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП

Дисциплина «Дискретная математика» относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины, модули» ОПОП по направлению подготовки 02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии". Дисциплина обязательна для освоения в 1 и 2 семестрах.

Целями освоения дисциплины являются:

- получить представление о роли дискретных математических объектов (множеств, комбинаторных моделей, логических функций) в информационных технологиях, о применении полученных знаний к решению практических задач;
- знать основные законы алгебры множеств и алгебры логики, основные принципы и формулы комбинаторики;
- уметь доказывать математические утверждения, зависящие от целого числа n , методом математической индукции, изображать множества, записываемые с помощью различных операций алгебры множеств, на диаграммах Венна-Эйлера, решать задачи комбинаторики, находить базис в системе булевых функций, упрощать формулы логики высказываний.
- знать различные виды графов (эйлеровы, гамильтоновы, планарные, двудольные и т.п.) и уметь их определять;
- уметь распознавать изоморфные графы;
- научиться определять вид связности орграфа и выделять в нем компоненты сильной связности;
- научиться применять графы к решению различных задач: освоить алгоритмы выделения в графе эйлерова цикла, поиска минимального маршрута в ненагруженном (ор)графе, построения остова минимального веса, нахождения минимального маршрута в нагруженном (ор)графе.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (Код компетенции, этап формирования)	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
ОПК-1. Способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой. Этап формирования – начальный.	<i>З1 (ОПК-1): Знать</i> основные факты, базовые концепции, принципы теории в области естественных наук, математики и информатики. <i>У1 (ОПК-1): Уметь</i> использовать в профессиональной деятельности базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой. <i>В1 (ОПК-1): Владеть</i> навыками применения базовых знаний естественных наук, математики и информатики, основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой.

Окончательное завершение формирования компетенций, предусмотренных в рамках данной дисциплины, происходит после сдачи экзамена по этой дисциплине.

3. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины (модуля) составляет 6 зачетных единиц, всего 216 часов, из которых 100 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (64 часа – занятия лекционного типа, 32 часа – занятия семинарского типа), в том числе 3 часа - мероприятия текущего контроля успеваемости, 56 часов составляет самостоятельная работа обучающегося (из них 5 часов – подготовка к зачету и 45 часов – промежуточная аттестация (экзамен)).

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины. Форма промежуточной аттестации по дисциплине.	Всего (часы)		В том числе									
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы								Самостоятельная работа обучающегося, часы	
			типакционного Занятия		типсеминарского Занятия		типлaborаторного Занятия		Всего			
	Очное	Заочное	Очное	заочное	Очное	Заочное	Очное	Заочное	Очное	Заочное	Очное	Заочное
Тема 1. Введение (метод математической индукции).	11		2		4				6		5	
Тема 2. Теория множеств.	25		10		8				18		7	
Тема 3. Комбинаторика.	20		5		8				13		7	
Тема 4. Алгебра логики.	22		9		8				17		5	
Тема 5. Введение в математическую логику (логика высказываний).	16		6		4				10		6	
В т.ч.текущий контроль	2				2	2			2		0	
Промежуточная аттестация – Зачет												
Тема 6. Начальные понятия теории графов.	20		9		6				15		5	
Тема 7. Неориентированные графы с циклами и без циклов.	24		10		6				16		8	
Тема 8. Ориентированные графы.	13		5		2				7		6	
Тема 9. Экстремальные задачи и алгоритмы на графах.	17		8		2				10		7	
В т.ч.текущий контроль	1				1	2			1			
Промежуточная аттестация – Экзамен												

Текущий контроль успеваемости проходит в рамках занятий семинарского и практического типа, групповых или индивидуальных консультаций. Промежуточный контроль осуществляется на зачете (в 1-м семестре) и на экзамене (во 2-м семестре).

Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Введение. Основные понятия дискретной математики. Виды теорем и методы доказательств: цепочка рассуждений, от противного, полная индукция, неполная индукция. Доказательство методом математической индукции тождеств, утверждений о делимости выражений, неравенств и формул n -ых членов числовых последовательностей, заданных рекуррентным способом.

Тема 2. Теория множеств. Понятие множества, способы задания множеств, отношения между множествами. Теоретико-множественные операции над множествами, их изображения на диаграммах Эйлера-Венна. Основные законы алгебры множеств. Понятие мощности множества, теорема Кантора о несчетности. Подмножества, разбиения и покрытия, теорема о мощности булеана. Прямое произведение и его свойства. Бинарные отношения, их виды и свойства. Функция как частный случай бинарного отношения; сюръективные, инъективные и биективные отображения. Критерий существования обратной функции. Отношения эквивалентности и порядка, диаграмма Хассе.

Тема 3. Комбинаторика. Правила суммы и произведения. Перестановки, сочетания с повторениями и без повторений, размещения с повторениями и без повторений. Теорема о полиномиальных коэффициентах. Формула включений и исключений. Бином Ньютона, свойства биномиальных коэффициентов; треугольник Паскаля.

Тема 4. Алгебра логики. Элементарные булевы функции от одной и двух переменных, существенные и фиктивные переменные. Функции алгебры логики, их количество.. Элементарные булевы функции от одной и двух переменных. Формулы алгебры логики. Суперпозиция булевых функций, порядок действий. Свойства элементарных булевых функций (основные законы алгебры логики). Двойственные функции. Теорема двойственности. Принцип двойственности. Теорема о разложении булевых функций по переменным. Нормальные формы алгебры логики: совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы (СДНФ, СКНФ). Полиномы Жегалкина. Способы их построения. Утверждения о замкнутости классов монотонных функций и функций, сохраняющих константу. Класс самодвойственных функций. Лемма о несамодвойственной функции. Класс монотонных функций. Лемма о немонотонной функции. Класс линейных функций. Лемма о нелинейной функции. Полнота системы булевых функций, критерий полноты (теорема Поста). Понятия базиса и предполного класса в алгебре логики. Следствия из теоремы Поста о составе базиса и предполных классах.

Тема 5. Введение в математическую логику. Понятие высказывания, логические связки, формулы логики высказываний. Равносильность формул логики высказываний. Основные равносильности. Виды формул логики высказываний. Важнейшие тавтологии. Правильные рассуждения и их схемы. Косвенные методы доказательства. Составление логических формул по высказываниям. Проблема разрешимости в логике высказываний и методы ее решения. Метод редукций проверки тождественной истинности формулы логики высказываний. Логические схемы и их реализация с помощью булевых функций. Синтез сумматора.

Тема 6. Начальные понятия теории графов. Краткие сведения из истории возникновения теории графов. Определение графа. Области применения теории графов. Способы задания неориентированных графов. Степени вершин. Основная теорема теории графов и ее следствие. Виды неориентированных графов. Дополнение к графу. Подграфы и их виды. Операции над графами. Маршруты, цепи и циклы в графе. Свойства маршрутов и циклов. Связность графов. Матрица связности (достижимости). Число маршрутов в неориентированном графе. Критерий связности графа. Теорема об оценке числа ребер графа через число вершин и число компонент связности. Мосты и разделяющие вершины. Признаки моста. Вершинная и реберная связности. N -связные графы. Следствие из теоремы об оценке числа ребер графа через число вершин и число компонент связности. Расстояния в графе. Диаметр, радиус и центр графа. Изоморфизм графов. Алгоритм решения задач на определение изоморфных графов. Теоремы о количестве помеченных графов с p вершинами и с p вершинами и q ребрами. Асимптотическая формула Пойа для числа непомеченных графов.

Тема 7. Неориентированные графы с циклами и без циклов. Цикломатическое число. Теоремы о количестве ребер в связных графах с циклами и без циклов. Неориентированные (свободные) деревья. Кодирование деревьев. Матричная теорема Кирхгофа о деревьях. Количество помеченных деревьев с p вершинами. Основные свойства свободных деревьев. Двудольные графы. Критерий двудольности графа. k -дольные графы. Эйлеровы и полужайлеровы графы. Критерий существования в графе эйлеровой цепи. Теорема Эйлера об эйлеровых графах (критерий эйлеровости графа). Решение задачи о кенигсбергских мостах. Теорема об оценке числа эйлеровых графов. Гамильтоновы графы, оценка их числа. Задача коммивояжера. Сравнение задач отыскания эйлеровых и гамильтоновых циклов. Достаточные условия гамильтоновости графа: теоремы Дирака, Оре и Хватала, необходимое условие гамильтоновости графа (о разделяющих вершинах графа). Планарные графы, оценка их числа. Подразбиение и стягивание ребер. Критерии планарности графов: теоремы Понтрягина-Куратовского и Вагнера. Теорема о количестве граней связного планарного графа и ее следствия. Вершинная и реберная раскраски графов. Хроматическое число и хроматический индекс, их оценки. Проблема четырех красок. История ее возникновения и решения. Теорема о 5 красках.

Тема 8. Ориентированные графы. Ориентированные графы и их виды. Основная теорема теории графов для орграфов. Связь с бинарными отношениями. Способы задания ориентированных графов. Маршруты, пути и контуры в орграфе. Свойства путей и контуров. Число ориентированных маршрутов в орграфе. Критерий существования контура в орграфе. Связность орграфов и ее виды. Компоненты сильной связности орграфа. Конденсация орграфа. Вычисление матриц достижимости и сильной связности. Алгоритм выделения компонент сильной связности в орграфе. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Свойства ориентированных деревьев.

Тема 9. Экстремальные задачи и алгоритмы на графах. Независимое множество вершин. Вершинное число независимости и его оценки. Алгоритм построения независимого множества вершин. Понятие клики графа. Взаимосвязь задач о клике и о независимом множестве вершин. Независимое множество ребер (паросочетание). Реберное число независимости. Построение наибольшего паросочетания методом чередующихся цепей. Покрывающие множества вершин и ребер. Теоремы о связи чисел независимости и покрытий в общем случае и для двудольного графа. Обходы графов.

Алгоритмы поиска в ширину и глубину. Теорема о поисках в ширину и глубину. Алгоритм поиска минимального маршрута в ненагруженном (ор)графе. Алгоритмы выделения эйлерова цикла и эйлеровой цепи в связном мультиграфе. Построение остова минимального веса. Алгоритмы Прима и Краскала. Задача о нахождении минимального маршрута в нагруженном орграфе. Алгоритм Дейкстры.

На практических занятиях более подробно изучается программный материал в плоскости отработки практических умений и навыков и усвоения следующих тем:

1. Алгоритм Евклида. Методы доказательств математических утверждений. Доказательство тождеств и утверждений о делимости *методом математической индукции* (ММИ).
2. Доказательство методом математической индукции неравенств и формул n -ых членов числовых последовательностей, заданных рекуррентным способом.
3. Алгебраические операции теории множеств. Диаграммы Эйлера-Венна.
4. Законы алгебры множеств и их применение для упрощения выражений. Мощность множества. Булеан. Прямое произведение.
5. Разбиение множества. Прямое произведение и бинарные отношения. Виды бинарных отношений.
6. Контрольная работа по теме “Метод математической индукции. Теория множеств”. Принципы сложения и умножения в комбинаторике.
7. Сочетания и размещения с повторениями и без повторений.
8. Бином Ньютона; разбиения, включения и исключения.
9. Контрольная работа по теме “Комбинаторика”. Существенные и фиктивные переменные функций алгебры логики.
10. Таблицы истинности. Двойственные функции. СДНФ, СКНФ.
11. Полиномы Жегалкина. Важнейшие замкнутые классы алгебры логики. Леммы о несамодвойственной, немонотонной и нелинейной функциях. Полнота системы булевых функций.
12. Теорема Поста о функциональной полноте. Базисы в системе логических функций.
13. Контрольная работа по теме “Алгебра логики”.
14. Формулы логики высказываний и их виды.
15. Проблема разрешимости в логике высказываний и методы ее решения. Правильность рассуждений.
16. Контрольная работа по теме “Логика высказываний”.
17. Способы задания графов. Основная теорема теории графов.
18. Операции над графами. Маршруты, цепи и циклы в графах. Связные графы.
19. Вершинная и реберная связность графов. Расстояния в графе. Изоморфизм графов. Разрезы в графе.
20. Деревья. Двудольные, эйлеровы и гамильтоновы графы.
21. Контрольная работа по теме “Неориентированные графы”.
22. Планырные графы. Раскраска графов.
23. Ориентированные графы.
24. Экстремальные задачи и алгоритмы на графах.

4. Образовательные технологии

В соответствии с рабочей программой и тематическим планом изучение дисциплины проходит в виде аудиторной и самостоятельной работы студентов. Используются традиционные образовательные технологии чтения лекций и проведения практических занятий. Предусмотрена реализация компетентного подхода широкого использования в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий.

На занятиях лекционного типа используются:

- лекция-информация;
- лекция-беседа.

Лекция-информация. Ориентирована на изложение и объяснение студентам теоретической информации, подлежащей осмыслению и запоминанию.

Лекция-беседа, или «диалог с аудиторией», является наиболее распространенной и сравнительно простой формой активного вовлечения студентов в учебный процесс. Эта лекция предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. В ходе лекции-беседы слушателям задаются вопросы информационного или проблемного характера, для выяснения мнений и уровня осведомленности по рассматриваемой теме, степени их готовности к восприятию последующего материала. Преимущество лекции-беседы состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей обучаемых.

На занятиях практического типа используются:

- регламентированная самостоятельная деятельность студентов;
- частично-поисковая деятельность при решении задач повышенной сложности,
- текущий контроль знаний студентов с помощью контрольных работ.

Практические занятия направлены на развитие самостоятельности обучающихся и приобретение умений и навыков. Данные учебные занятия углубляют, расширяют, детализируют полученные на лекции знания. Практическое занятие предполагает выполнение студентами заданий под руководством преподавателя. Во время практических занятий проводится интерактивный опрос для контроля понимания текущего материала, а также разбор наиболее сложных задач из домашних заданий и материалов для самостоятельной подготовки к контрольным работам, зачету и экзамену.

Формой **итогового контроля** знаний студентов по дисциплине является **экзамен**, в ходе которого оценивается уровень теоретических знаний и навыки решения практических задач.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов направлена на выполнение домашних заданий по темам практических занятий, подготовку к контрольным работам по основным темам изучаемой дисциплины, а также подготовку к зачету (в 1-м семестре) и экзамену (во 2-м семестре) по указанной дисциплине. Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по конспектам лекций и по учебникам, указанным в списке литературы, решении практических задач.

Самостоятельная работа под контролем преподавателя направлена на активизацию познавательной деятельности студента и установлению «обратной связи» между студентом и преподавателем. Текущий контроль выполнения домашних заданий осуществляется преподавателем во время практических занятий.

Цель самостоятельной работы - подготовка современного компетентного специалиста и формирование способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю),
включающий:

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

ОПК-1: способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой

Индикаторы Компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
<u>Знания</u> Знать основные факты, базовые концепции, принципы теории в области естественных наук, математики и информатики.	Отсутствие знаний материала	Наличие грубых ошибок в основном материале	Знание основного материала с рядом негрубых ошибок	Знание основного материала с рядом заметных погрешностей	Знание основного материала с незначительными погрешностями	Знание основного материала без ошибок и погрешностей	Знание основного и дополнительного материала без ошибок и погрешностей
<u>Умения</u> Уметь использовать в профессиональной деятельности базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой.	Полное отсутствие умения использовать базовые математические знания, основные факты, концепции, принципы дискретной математики.	Отсутствие умения использовать базовые математические знания, основные факты, концепции, принципы дискретной математики.	Умение использовать отдельные математические знания, основные факты, концепции, принципы дискретной математики, но с существенными ошибками	Умение использовать отдельные математические знания, основные факты, концепции, принципы дискретной математики при наличии незначительных ошибок	Умение использовать отдельные математические знания, основные факты, концепции, принципы дискретной математики	Умение использовать математические знания, определения, теоремы, концепции, принципы дискретной математики	Умение использовать математические знания, определения, теоремы, концепции, принципы дискретной математики и способность решать задачи повышенной сложности
<u>Навыки</u> Владеть навыками применения базовых знаний естественных наук, математики и информатики, основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и	Полное отсутствие навыков применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.	Отсутствие навыков применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.	Наличие минимальных навыков применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.	Посредственное владение навыками применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.	Достаточное владение навыками применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.	Хорошее владение навыками применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.	Всестороннее владение навыками применения базовых математических знаний, основных фактов, концепций, принципов дискретной математики.

информатикой.							
Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий	0 – 20 %	20 – 50 %	50 – 70 %	70-80 %	80 – 90 %	90 – 99 %	100%

6.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

По результатам 1-го семестра итоговый контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде зачета, на котором определяется:

- уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентами изученного материала;
- способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Зачет проводится в устной форме и заключается в ответе студентом после предварительной подготовки на теоретический вопрос курса и решением практических задач по теме контрольной работы с последующим их обоснованием. Допускается выставление студенту зачета по результатам его работы на практических занятиях при условии успешного выполнения им контрольной работы.

Оценка	Уровень подготовки
Зачтено	В целом удовлетворительная подготовка. Студент дает полный ответ на теоретический вопрос (допускаются небольшие неточности при формулировке теорем и их доказательстве), а также решает практические задачи без грубых ошибок. Студент посещал практические занятия и активно на них работал. Выполнение контрольных зачетных заданий от 50 до 100%.
Не зачтено	Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы на теоретические вопросы, допускает грубые ошибки при решении практических задач. Выполнение контрольных зачетных заданий до 50%.

По результатам 2-го семестра итоговый контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде экзамена, на котором определяется:

- уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентами изученного материала;
- способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Экзамен проводится в устной форме и заключается в ответе студентом после предварительной подготовки на теоретические вопросы курса и решением практической задачи с последующим его обоснованием. По окончании ответа на вопросы билета в рамках тематики курса проводится собеседование в форме вопросов, на которые студент должен дать краткий ответ.

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	<p>Высокий уровень подготовки, безупречное владение теоретическим материалом, студент демонстрирует творческий подход к решению нестандартных ситуаций. Студент дал полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета, подтверждая теоретический материал практическими примерами из практики. Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>100 %-ное выполнение контрольных экзаменационных заданий</p>
Отлично	<p>Высокий уровень подготовки с незначительными ошибками. Студент дал полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета, подтверждает теоретический материал практическими примерами из практики. Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий на 90% и выше</p>
Очень хорошо	<p>Хорошая подготовка. Студент дает ответ на все теоретические вопросы билета, но имеются неточности в определениях понятий, процессов и т.п. Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 80 до 90%.</p>
Хорошо	<p>В целом хорошая подготовка с заметными ошибками или недочетами. Студент дает полный ответ на все теоретические вопросы билета, но имеются неточности в определениях понятий, процессов и т.п. Допускаются ошибки при ответах на дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора. Студент работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 70 до 80%.</p>
Удовлетворительно	<p>Минимально достаточный уровень подготовки. Студент показывает минимальный уровень теоретических знаний, делает существенные ошибки при решении практических задач, но при ответах на наводящие вопросы может правильно сориентироваться и в общих чертах дать правильный ответ. Студент посещал практические занятия.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 50 до 70%.</p>
Неудовлетворительно	<p>Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы экзаменатора. Студент пропустил большую часть практических занятий.</p>

	Выполнение контрольных экзаменационных заданий до 50%.
Плохо	<p>Подготовка абсолютно недостаточная. Студент не отвечает на поставленные вопросы. Студент отсутствовал на большинстве лекций и практических занятий.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий менее 20 %.</p>

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих сформированность компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- устные и письменные опросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания, включающих одну или несколько задач (вопросов).

Для проведения итогового контроля сформированности компетенции используются:

- письменные и устные ответы на теоретические вопросы,
- решение практических задач.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих сформированность компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Список вопросов по теории к зачету (для оценки сформированности знаний компетенции ОПК-1)

1. Множества. Способы задания множеств. Равные множества. Свойства отношения включения. Сравнимость множеств.
2. Теоретико-множественные операции над множествами: абсолютное и относительное дополнения, объединение, пересечение, симметрическая разность. Их изображения на диаграммах Венна-Эйлера.
3. Основные законы алгебры множеств. Доказательство одного из законов (по выбору преподавателя) с помощью диаграммы Венна.
4. Законы дистрибутивности. Доказательство (по определению операций алгебры множеств, без диаграммы Венна!) одного из них по выбору преподавателя.
5. Законы де Моргана. Доказательство (по определению операций алгебры множеств, без диаграммы Венна!) одного из них по выбору преподавателя.
6. Обобщенные тождества: обобщенная дистрибутивность, обобщенные законы де Моргана (доказательство одного из законов по выбору студента).
7. Мощность множества. Теорема Кантора о несчетности.
8. Подмножества. Разбиения и покрытия. Теорема о мощности булеана.
9. Прямое произведение и его свойства.
10. Теорема о мощности прямого произведения n множеств.
11. Бинарные отношения, их виды и свойства.
12. Функция как частный случай бинарного отношения. Сюръективные, инъективные и биективные отображения.
13. Отношение эквивалентности и отношение порядка. Диаграмма Хассе.
14. Правила суммы и произведения. Перестановки. Сочетания (с повторениями и без повторений). Размещения (с повторениями и без повторений).
15. Число разбиений множества. Теорема о числе упорядоченных блоков разбиений.
16. Полиномиальная формула. Теорема о полиномиальных коэффициентах (без доказательства) и ее применение.

17. Формула включений и исключений.
18. Бином Ньютона.
19. Следствия из бинома Ньютона. Треугольник Паскаля.
20. Свойства биномиальных коэффициентов.
21. Функции алгебры логики, их количество. Существенные и фиктивные переменные. Элементарные булевы функции от одной и двух переменных.
22. Формулы алгебры логики. Суперпозиция булевых функций, порядок действий. Свойства элементарных булевых функций (основные законы алгебры логики).
23. Двойственные функции. Теорема двойственности. Принцип двойственности.
24. Теорема о разложении булевых функций по переменным. СДНФ, СКНФ.
25. Полиномы Жегалкина. Способы их построения.
26. Утверждения о замкнутости классов монотонных функций и функций, сохраняющих константу.
27. Класс самодвойственных функций. Лемма о несамодвойственной функции.
28. Класс монотонных функций. Лемма о немонотонной функции.
29. Класс линейных функций. Лемма о нелинейной функции.
30. Полнота системы булевых функций. Критерий полноты (теорема Поста).
31. Понятие базиса в алгебре логики. Следствие из теоремы Поста о составе базиса.
32. Понятие предполного класса в алгебре логики. Следствие из теоремы Поста о предполных классах.
33. Понятие высказывания. Логические связки. Формулы логики высказываний.
34. Равносильность формул логики высказываний. Основные равносильности.
35. Виды формул логики высказываний. Важнейшие тавтологии.
36. Правильные рассуждения и их схемы. Косвенные методы доказательства. Составление логических формул по высказываниям.
37. Проблема разрешимости в логике высказываний и методы ее решения.
38. Метод редукций проверки тождественной истинности формулы логики высказываний.
39. Логические схемы и их реализация с помощью булевых функций. Синтез сумматора.

Список экзаменационных вопросов по теории (для оценки сформированности знаний компетенции ОПК-1)

1. Краткие сведения из истории возникновения теории графов. Определение графа. Области применения теории графов.
2. Способы задания неориентированных графов.
3. Степени вершин. Основная теорема теории графов и ее следствие. Виды неориентированных графов.
4. Дополнение к графу. Подграфы и их виды. Операции над графами.
5. Маршруты, цепи и циклы в графе. Цикломатическое число. Свойства маршрутов и циклов.
6. Связность графов. Матрица связности (достижимости). Теорема о числе маршрутов в неориентированном графе (без доказательства). Критерий связности графа.
7. Теорема об оценке числа ребер графа через число вершин и число компонент связности.
8. Мосты и разделяющие вершины. Признаки моста. Вершинная и реберная связности.

- N-связные графы. Следствие из теоремы об оценке числа ребер графа через число вершин и число компонент связности.
9. Расстояния в графе. Диаметр, радиус и центр графа.
 10. Изоморфизм графов. Алгоритм решения задач на определение изоморфных графов.
 11. Теоремы о количестве помеченных графов с p вершинами и с p вершинами и q ребрами. Асимптотическая формула Пойа для числа непомеченных графов.
 12. Теоремы о количестве ребер в связных графах с циклами и без циклов.
 13. Неориентированные (свободные) деревья. Кодирование деревьев. Матричная теорема Кирхгофа о деревьях (без доказательства). Количество помеченных деревьев с p вершинами.
 14. Основные свойства свободных деревьев.
 15. Двудольные графы. Критерий двудольности графа. k -дольные графы.
 16. Эйлеровы и полуэйлеровы графы. Критерий существования в графе эйлеровой цепи.
 17. Леммы для доказательства теоремы Эйлера об эйлеровых графах (критерия эйлеровости графа).
 18. Теорема Эйлера об эйлеровых графах (критерий эйлеровости графа). Решение задачи о кенигсбергских мостах.
 19. Теорема об оценке числа эйлеровых графов.
 20. Гамильтоновы графы. Теорема об оценке числа гамильтоновых графов (без доказательства). Задача коммивояжера. Сравнение задач отыскания эйлеровых и гамильтоновых циклов.
 21. Теорема Дирака (достаточное условие гамильтоновости графа).
 22. Достаточные условия гамильтоновости графа (теоремы Оре и Хватала – без доказательства), необходимое условие гамильтоновости графа (о разделяющих вершинах графа).
 23. Планарные графы. Подразбиение и стягивание ребер. Теоремы Понтрягина-Куратовского и Вагнера (без доказательства). Теорема об оценке числа планарных графов (без доказательства).
 24. Теорема о количестве граней связного планарного графа.
 25. Следствия из теоремы о количестве граней связного планарного графа.
 26. Вершинная и реберная раскраски графов. Хроматическое число и хроматический индекс, их оценки.
 27. Проблема четырех красок. История ее возникновения и решения.
 28. Теорема о 5 красках.
 29. Ориентированные графы и их виды. Основная теорема теории графов для орграфов. Связь с бинарными отношениями.
 30. Способы задания ориентированных графов.
 31. Маршруты, пути и контуры в орграфе. Свойства путей и контуров. Теорема о числе ориентированных маршрутов в орграфе (без доказательства). Критерий существования контура в орграфе.
 32. Связность орграфов и ее виды. Компоненты сильной связности орграфа. Конденсация орграфа.
 33. Теорема о вычислении матриц достижимости и сильной связности (без доказательства). Алгоритм выделения компонент сильной связности в орграфе.

34. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья. Их сравнительный анализ и области применения. Свойства ориентированных деревьев (без доказательства).
35. Независимое множество вершин. Вершинное число независимости и его оценки. Алгоритм построения независимого множества вершин. Понятие клики графа. Взаимосвязь задач о клике и о независимом множестве вершин.
36. Независимое множество ребер (паросочетание). Реберное число независимости. Построение наибольшего паросочетания методом чередующихся цепей.
37. Покрывающие множества вершин и ребер. Теоремы о связи чисел независимости и покрытий в общем случае и для двудольного графа (без доказательства).
38. Обходы графов. Алгоритмы поиска в ширину и глубину. Теорема о поисках в ширину и глубину.
39. Алгоритм поиска минимального маршрута в ненагруженном (ор)графе.
40. Алгоритмы выделения эйлера цикла и эйлеровой цепи в связном мультиграфе.
41. Построение остова минимального веса. Алгоритмы Прима и Краскала.
42. Задача о нахождении минимального маршрута в нагруженном орграфе. Алгоритм Дейкстры.

Примеры практических заданий для зачета (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-1)

1. Докажите, что для всех натуральных n верно равенство:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Докажите, что для всех натуральных n верно неравенство: $4^n \geq 3^n + n^2$.

3. Доказать, что для всех натуральных n справедливо утверждение:
 $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ делится без остатка на 19.

4. Числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ задана условиями: $a_1 = \frac{14}{3}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(27a_n + 32). \text{ Докажите, что } a_n = \frac{2}{3}(9^n - 2), \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

5. Проверьте на диаграмме Венна, выполняется ли тождество:
 $(A \cap B) \otimes C = (A \otimes C) \cap (B \otimes C)$?

6. Упростите выражение с помощью законов алгебры множеств:

$$(A \cap B) \cup (\overline{A \cup C}) \cup (A \setminus B).$$

7. Составьте матрицу для заданного на множестве X бинарного отношения ρ . Является ли ρ отношением эквивалентности или порядка (полного или частичного? строгого или нестрогого)? Найдите ρ^{-1} и $\rho \circ \rho^{-1}$. Какова мощность булеана 2^X ?
 $X = \{1, 3, 4, 6, 7\}, \quad \rho = \{ \langle a, b \rangle, a, b \in X \mid a - b - \text{четное число} \}.$

8. Даны 2 множества: $A = \{1; 2\}, B = \{5; 6; 7\}.$

а) Составьте множества $B \times A$ и $2^A \times B$.

б) Какова мощность множества $A \times 2^B \times B$?

Выпишите любые 4 элемента этого множества.

в) Из каких элементов состоит заданное на множестве $B \times A$ бинарное отношение $\rho = \{ \langle b, a \rangle, a \in A, b \in B \mid b - a \text{ - простое число} \}$?
 Постройте матрицу такого отношения. Найдите D_ρ и E_ρ .

9. Бинарные отношения ρ_1 и ρ_2 заданы матрицами. Постройте матрицу композиции $\rho_1 \circ \rho_2$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
 \rho_1 = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{array} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
 \rho_2 = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Является ли отношение $\rho_1 \circ \rho_2$ рефлексивным, симметричным, транзитивным?

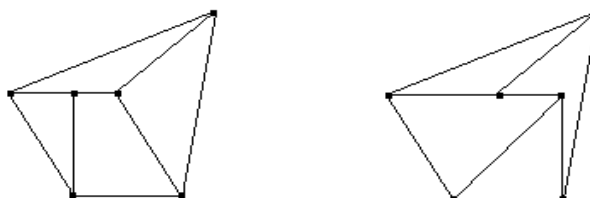
Составьте $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1}$.

10. Из букв разрезной азбуки составлено слово МАТЕМАТИКА. Затем все буквы этого слова перевернули лицевой стороной вниз и перемешали. Наудачу последовательно извлекают из них 4 буквы. В скольких вариантах взятые 4 буквы с учетом перестановок могут образовать слово ТЕМА?
11. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?
12. В копилке хранятся 30 монет достоинством 1, 2 и 5 рублей. Сколько существует различных комбинаций монет (например, 3 монеты по 1 рублю, 17 монет по 2 рубля и 10 монет по 5 рублей)?
13. 7 яблок и 3 груши надо положить в 2 пакета так, чтобы в каждом пакете была хотя бы 1 груша (сами пакеты считаются неразличимыми), и количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?
14. За последние 2 года из 150 артистов московского цирка на гастролях в Лондоне побывали 42 человека, в Париже – 56 человек, в Риме – 48 человек. Во всех трех вышеперечисленных городах не побывал никто. Сколько артистов не побывали ни в одном из этих городов, если 2 города посетило 40 человек?
15. Сколько различных перестановок можно образовать из букв слова “КОЛОКОЛ”?
16. Составьте СДНФ и полином Жегалкина для формулы $(x \sim y)^{\vee} ((\bar{x} \rightarrow z) \& \bar{y})$.
17. Докажите рассуждениями или с помощью законов логики высказываний равносильность $(A \sim B) \rightarrow ((A^{\vee} C) \& (B^{\vee} C)) \equiv A^{\vee} B^{\vee} C$
18. Докажите или опровергните рассуждениями тождественную истинность формулы $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

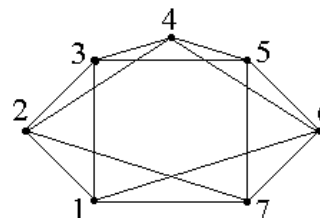
19. Пусть A , B и C – жители острова, обитатели которого относятся либо к “рыцарям”, всегда говорящим только правду, либо к “лжецам”, изрекающим только ложь. B говорит: “Неверно, что A и C – рыцари”. C говорит: “Если A – рыцарь, то B тоже рыцарь”. Кто A , кто B и кто C ?

Примеры практических заданий для экзамена (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-1)

1. Докажите, что в любом графе найдутся, по крайней мере, две вершины одинаковой степени.
2. В доме отдыха 35 корпусов. Электрик решил соединить телефонными проводами каждый корпус ровно с пятью другими. Возможно ли такое соединение?
3. Изоморфны ли данные графы?
Ответ обоснуйте.



4. Сколько существует попарно неизоморфных графов с 16 вершинами и 117 ребрами?
5. Докажите, что если в графе G с p вершинами ($p > 3$) число ребер равно $C_{p-1}^2 + 2$, то этот граф гамильтонов.
6. Существуют ли в полном двудольном графе $K_{3,3}$ эйлеров цикл, гамильтонов цикл, эйлерова цепь, гамильтонова цепь? Укажите их или докажите их отсутствие.
7. Докажите, что в любом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.
8. У графа G с p вершинами ($p \geq 3$) только 1 пара вершин не соединена ребром (все остальные вершины смежные). При каком p граф G является планарным?
9. Найдите хроматическое число и хроматический индекс следующего графа:



10. Определите, имеет ли контур орграф D с матрицей смежности:

Выясните, является ли этот орграф слабо связным, односторонне связным или сильно связным. Составьте для него матрицы достижимости и сильной связности.

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Пользуясь соответствующим алгоритмом, найдите эйлеров цикл или эйлерову цепь в мультиграфе G , заданном матрицей смежности:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

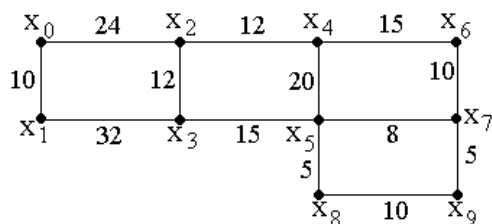
12. Пользуясь соответствующим алгоритмом, найдите эйлеров цикл или эйлерову цепь в мультиграфе H , заданном матрицей смежности.

$$A(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Пользуясь алгоритмом Дейкстры, определите минимальный путь из v_1 в v_6 в нагруженном орграфе, заданном матрицей весов.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	4	∞	12	∞	∞
v_2	∞	0	2	∞	5	10
v_3	3	∞	0	3	∞	∞
v_4	∞	∞	∞	0	1	∞
v_5	∞	∞	∞	∞	0	2
v_6	∞	∞	7	∞	∞	0

14. Пользуясь алгоритмами Прима или Краскала, построить остов минимального веса для графа:



6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. №55-ОД,

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) основная литература:

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.(45)
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. М.: Энергоатомиздат, 1988. 2-е изд., переработанное и дополненное. – 480 с.(9)
3. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
4. Павлов И.С., Харчева А.А. Сборник задач по дискретной математике // Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017, 52 с.
5. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.(1)

б) дополнительная литература:

1. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. - М.: Наука, 1985.(1)
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: Наука, 1977.(3)

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

<http://www.intuit.ru/studies/courses/13859/1256/info>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Для обучения студентов названной дисциплине имеются в наличии: специальные кабинеты, оборудованные мультимедийными средствами обучения; компьютерные классы, где имеется возможность выхода в Интернет; присутствует полный комплект лицензионного обеспечения, необходимый для работы компьютерных программ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Автор - _____ Павлов И.С.

Рецензент (ы) _____ Шкелев Е.И.

Заведующий кафедрой _____ Дубков А.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии радиофизического факультета от 25 мая 2023, протокол № 04/23.