

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональные методы анализа стохастических систем

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

02.04.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность образовательной программы

Теория информации

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.10 Функциональные методы анализа стохастических систем относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-3: Способен проводить анализ математических моделей, создавать инновационные методы решения прикладных задач профессиональной деятельности в области информатики и математического моделирования	ОПК-3.1: Знает методы теории алгоритмов, методы системного и прикладного программирования, основные положения и концепции в области математических, информационных и имитационных моделей ОПК-3.2: Умеет соотносить знания в области программирования, интерпретацию прочитанного, определять и создавать информационные ресурсы глобальных сетей, образовательного контента, средств тестирования систем ОПК-3.3: Имеет практический опыт применения разработки программного обеспечения и тестирования программных продуктов	ОПК-3.1: Знать функциональные методы размыкания корреляционных средних от стохастических функционалов ОПК-3.2: Уметь применять функциональные методы к исследованию нелинейных динамических систем с различными видами случайных возмущений ОПК-3.3: Владеть функциональным аппаратом статистического анализа при изучении нелинейных процессов и явлений	Практическая задача	Зачёт: Исследовательское задание
ОПК-4: Способен оптимальным образом комбинировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности с учетом требований	ОПК-4.1: Знает принципы сбора и анализа информации, создания информационных систем на стадиях жизненного цикла ОПК-4.2: Умеет осуществлять управление проектами информационных систем ОПК-4.3: Имеет практический опыт анализа	ОПК-4.1: Знать современное состояние исследований в области статистического анализа нелинейных динамических систем ОПК-4.2: Уметь применять функциональный аппарат вывода уравнений для средних	Практическая задача	Зачёт: Исследовательское задание

информационной безопасности	и интерпретации информационных систем	характеристик в соответствии с типом поставленной задачи ОПК-4.3: Владеть навыками анализа полученных аналитическими и численно-аналитическими методами результатов, формулировки выводов и рекомендаций по отдельным разделам тем		
-----------------------------	---------------------------------------	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	0
- КСР	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Элементы функционального анализа и теории случайных процессов	10	6	0	6	4
Тема 2. Формулы размыкания корреляции стохастических функционалов	37	10	0	10	27

Тема 3. Статистический анализ нелинейных динамических систем с гауссовыми и телеграфными случайными воздействиями	60	16	0	16	44
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	32	0	33	75

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Понятие вариационной (функциональной) производной, различные определения. Основные правила функционального дифференцирования. Функциональный ряд Тейлора. Формула сдвига. Методы восстановления функционала по его вариационной производной. Задание случайных процессов с помощью вероятностного и характеристического функционалов. Описание случайных процессов на языке последовательностей моментных и кумулянтных функций.

Тема 2. Вывод общей формулы размыкания корреляции случайного процесса с произвольным функционалом этого процесса. Формула Фуруцу-Новикова для гауссова шума и ее обобщения. Общая формула размыкания корреляции двух функционалов одного и того же случайного процесса. Формула дифференцирования корреляционного среднего для марковского процесса. Формула дифференцирования Шапиро-Логина для марковского дихотомического шума. Размыкание корреляции для пуассоновского импульсного шума. Безгранично делимые и устойчивые распределения. Формула Леви-Хинчина. Применение теории безгранично делимых распределений к выводу корреляционной формулы для негауссова белого шума.

Тема 3. Функциональный метод вывода уравнения Фоккера-Планка из стохастического уравнения Ланжевена с гауссовым белошумовым источником. Демонстрация неразрывной связи флуктуационных и диссипационных процессов в термодинамике. Соотношение Эйнштейна. Моментная неустойчивость и устойчивость по вероятности на примере системы первого порядка с флуктуирующим параметром диссипации. Явление стохастического параметрического резонанса для классического осциллятора с флуктуирующей частотой. Вычисление средней интенсивности излучения лазера в стационарном режиме (в теории Лэмба третьего порядка). Вывод замкнутой системы уравнений для нелинейной системы первого порядка общего вида с возмущением в виде марковского дихотомического шума. Функциональный метод вывода уравнения Фоккера-Планка с дробной пространственной производной для системы первого порядка с воздействием в форме шума Леви с устойчивым вероятностным распределением. Стационарные вероятностные характеристики супердиффузии в форме полетов Леви.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Дубков А.А. Современные методы статистического анализа процессов переноса в биологических системах. Учебно-методические материалы. – Н.Новгород: ННГУ, 2007. – 92 с.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Практическая задача) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

Получить формулу дифференцирования функционального корреляционного среднего $\langle \eta(t) R_t[\eta] \rangle$ для марковского процесса, который скачком меняет свои значения на статистически независимые и одинаково распределенные с заданной плотностью вероятности $W_0(y)$. Моменты перескоков образуют пуассоновский поток событий со средней частотой ν , т.е. вероятность наличия n скачков на временном интервале длительностью T подчиняется закону:

$$P_n(T) = \frac{(\nu T)^n}{n!} e^{-\nu T}.$$

Применяя формулу дифференцирования Шапиро-Логина, вывести уравнение для характеристического функционала

$$\Theta_t[u] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t u(\tau) \eta(\tau) d\tau \right\} \right\rangle$$

марковского дихотомического шума $\eta(t)$, принимающего с равными вероятностями значения $\pm a_0$ со средней частотой перескоков ν . Здесь $u(t)$ – детерминированная функция.

Вероятностный функционал гауссова стационарного случайного процесса $z(t)$ с нулевым средним значением $\langle z(t) \rangle = 0$ и ковариационной функцией $\langle z(t) z(t') \rangle = K(t - t')$ имеет вид

$$W[z] = N \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint z(s) z(s') \Phi(s - s') ds ds' \right\},$$

где N - постоянная нормировки. Определить формулу связи функций $K(\tau)$ и $\Phi(\tau)$, учитывая соотношение

$$K(t - t') = \overline{\int \int z(t) z(t') W[z] Dz}.$$

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Практическая задача) для оценки сформированности компетенции ОПК-4:

Вывести уравнение для совместной плотности вероятности $W(x, v, t)$ координаты и скорости частицы, описываемой уравнением Ланжевена

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = \eta(t),$$

где $\eta(t)$ - марковский дихотомический шум, переключающийся между значениями $\pm a$ со средней частотой ν .

Получить замкнутое уравнение для плотности вероятности $P(x, t)$ координаты $x(t)$ свободной частицы, движущейся в вязкой среде:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ - гауссов белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью $2D$.

Рассматривается нелинейная динамическая система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t),$$

возмущаемая гауссовым шумом с нулевым средним значением и экспоненциальной функцией корреляции

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau} e^{-|t-t'|/\tau}.$$

Применяя формулу Фуруцу-Новикова и используя малость времени корреляции τ , вывести приближенное уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности $W(x, t)$ в линейном приближении по τ .

Вывести формулу расщепления корреляции

$$\langle \eta(t') R_t[\eta(\tau)] \rangle,$$

где: $\eta(t)$ - марковский дихотомический процесс, принимающий значения ± 1 со средней частотой перескоков ν , $t' \geq t$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Практическая задача)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	При решении задачи использован теоретический материал курса и владение

Оценка	Критерии оценивания
	математическим аппаратом.
не зачтено	Задача не решена. Знание теории отсутствует.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

	ответа		и недочетами	недочетами		недочетов	
--	--------	--	-----------------	------------	--	-----------	--

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Исследовательское задание) для оценки сформированности компетенции ОПК-3

1. Функциональным методом получить замкнутое уравнение для плотности вероятности $P(x, t)$ фазовой переменной $x(t)$ нелинейной динамической системы, описываемой стохастическим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ – пуассоновский белый шум

$$\zeta(t) = \sum_k a_k \delta(t - t_k),$$

имеющий нулевое среднее значение $\langle \zeta(t) \rangle = 0$, с заданным вероятностным распределением амплитуд $W(a)$ и средней частотой появления импульсов ν . Найти установившееся ($t \rightarrow \infty$) вероятностное распределение для случая

$$W(a) = \lambda e^{-\lambda a}, \quad a > 0.$$

2. Двухуровневая квантовая система с энергиями уровней E_1 и E_2 ($E_1 < E_2$) взаимодействует со случайным окружением. Чему равно асимптотическое значение разности населенностей $\langle |q_2|^2 \rangle - \langle |q_1|^2 \rangle$, если комплексные переменные $q_1(t)$ и $q_2(t)$ удовлетворяют стохастическому уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{dq_1}{dt} = E_1 q_1 + \eta(t) q_2,$$

$$i\hbar \frac{dq_2}{dt} = E_2 q_2 + \eta(t) q_1,$$

а $\eta(t)$ – марковский дихотомический шум, принимающий с равными вероятностями значения $\pm a_0$ со средней частотой переключений ν .

3. Найти условие устойчивости в средне-квадратичном гармонического осциллятора с флуктуирующим декрементом затухания

$$\ddot{x} + [2\delta + \xi(t)] \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью $2D$.

4. Определить условие устойчивости в среднем гармонического осциллятора с флуктуирующей частотой:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + [\omega_0^2 + \eta(t)]x = 0,$$

где $\eta(t)$ – марковский дихотомический шум, принимающий с равными вероятностями значения $\pm a_0$ со средней частотой переключений ν .

5. Найти установившееся ($t \rightarrow \infty$) вероятностное распределение переменной $x(t)$ в генетической модели Хонгера

$$\frac{dx}{dt} = -\text{th } x + \frac{\eta(t)}{\text{ch } x},$$

где $\eta(t)$ – марковский дихотомический шум, принимающий с равными вероятностями значения $\pm a_0$ со средней частотой переключений ν .

6. Через уравнение для плотности вероятности найти установившийся ($t \rightarrow \infty$) начальный момент n -го порядка плотности изолированной биологической популяции $x(t)$, описываемой стохастическим уравнением Ферхюльста

$$\dot{x} = [h + \xi(t)]x - \beta x^2,$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью $2D$ ($h, \beta > 0$).

7. Функциональным методом получить замкнутую систему уравнений для совместной плотности вероятности численностей популяций в биологической модели Лотки-Вольтерры “хищник-жертва”

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [\alpha(1 + \eta(t)) - \beta y]x, \\ \frac{dy}{dt} &= [\delta x - \gamma(1 + \eta(t))]y. \end{aligned}$$

Здесь $x(t)$ – численность популяции жертв, $y(t)$ – численность популяции хищников, $\eta(t)$ – марковский дихотомический шум, принимающий с равными вероятностями значения $\pm a_0$ со средней частотой переключений ν ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – положительные параметры).

Указание. Воспользоваться представлением $P(x, y, t)$ в форме среднего

$$P(x, y, t) = \langle \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \rangle.$$

8. Функциональным методом вывести замкнутое уравнение для плотности вероятности интенсивности $I = |E|^2$ комплексного лазерного поля E

$$\frac{dE}{dt} = [\alpha + \xi(t)]E - \beta E|E|^2$$

с учетом флуктуаций параметра накачки, где $\xi(t)$ – гауссов белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью $2D$ ($\alpha > 0, \beta > 0$).

9. Функциональным методом получить замкнутую систему уравнений для плотности вероятности $P(x, t)$ фазовой переменной динамической системы

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\eta(t) + h(x)\xi(t),$$

где: $\eta(t)$ – марковский дихотомический шум со значениями $\pm a_0$ и средней частотой переключений ν , $\xi(t)$ – гауссов белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью $2D$.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Исследовательское задание) для оценки сформированности компетенции ОПК-4

10. Функциональным методом получить замкнутое уравнение для плотности вероятности $P(x, t)$ фазовой переменной $x(t)$ нелинейной динамической системы, описываемой стохастическим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)L(t),$$

где $L(t)$ – белый шум с симметричным вероятностным распределением Леви с нулевым средним значением, индексом α и параметром интенсивности Q .

11. Получить уравнения для средних характеристик линейной системы общего вида с одним флуктуирующим параметром

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\eta(t)] \vec{X},$$

где: \mathbf{A} и \mathbf{B} – $n \times n$ матрицы постоянных коэффициентов, $\eta(t)$ – марковский дихотомический шум, принимающий с равной вероятностью значения $\pm a_0$ со средней частотой перескоков ν .

12. Функциональным методом получить уравнение для совместной плотности вероятности $P(x, v, t)$ координаты $x(t)$ и скорости $v(t)$ гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = L(t),$$

где $L(t)$ – белый шум с симметричным вероятностным распределением Леви с нулевым средним значением, индексом α и параметром интенсивности Q .

13. Функциональным методом получить уравнение для плотности вероятности $P(x, t)$ объема опухоли в модели Гомпертца

$$\frac{dx}{dt} = rx - \gamma x \ln x + \zeta(t)x,$$

где: r – темп роста опухоли, γ – фактор замедления роста, $\zeta(t)$ – пуассоновский белый шум

$$\zeta(t) = \sum_k a_k \delta(t - t_k)$$

с заданным вероятностным распределением амплитуд $W(a)$ и средней частотой появления импульсов ν . Найти установившееся ($t \rightarrow \infty$) вероятностное распределение для случая

$$W(a) = \lambda e^{-\lambda a} \quad \lambda \gg \nu$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Исследовательское задание)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Исследовательское задание выполнено самостоятельно или с подсказками преподавателя.
не зачтено	Исследовательское задание не выполнено даже с подсказками преподавателя.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Кляцкин Валерий Исаакович. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. - М. : Наука, 1975. - 239 с. : граф. - (Современные проблемы физики). - 1.02., 3 экз.
2. Кляцкий Валерий Исаакович. Динамика стохастических систем : курс лекций. - М. : Физматлит, 2002. - 240 с. - ISBN 5-9221-0248-6 : 24.00., 2 экз.
3. Шапиро Владлен Ерахмилевич. Динамические системы при случайных воздействиях : Простые средства анализа / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т физики им. Л. В. Киренского ; отв. ред. Г. М. Заславский. - Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. - 160 с. : ил. - 1.60., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Кляцкин Валерий Исаакович. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. - М. : Наука, 1980. - 336 с. : ил. - 3.80., 19 экз.
2. Кляцкин Валерий Исаакович. Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. - М. : Физматлит, 2001. - 528 с. - ISBN 5-9221-0186-2 : 96.23., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

https://www.studmed.ru/dubkov-a-a-sovremennye-metody-statisticheskogo-analiza-processov-perenosa-v-biologicheskikh-sistemah_b251a5f3f24.html

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, специализированным оборудованием: ноутбук, проектор, экран

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.04.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Автор(ы): Дубков Александр Александрович, доктор физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Мальцев Александр Александрович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Павлов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 18.12.2023, протокол № 9/23.