

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 8 от 24.09.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Векторный и тензорный анализ

Уровень высшего образования
Специалитет

Направление подготовки / специальность
11.05.02 - Специальные радиотехнические системы

Направленность образовательной программы
Радиотехнические системы и комплексы сбора и обработки информации

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.11 Векторный и тензорный анализ относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы естественнонаучных дисциплин, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии	ОПК-1.1: Разбирается в основных разделах математических и естественнонаучных дисциплин ОПК-1.2: Применяет основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований	ОПК-1.1: Знает основные теоремы и алгоритмы решения задач векторного анализа, интегральные формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса; свойства и физический смысл операций градиента, дивергенции, ротора; основные свойства потенциальных и соленоидальных полей ОПК-1.2: Умеет вычислять криволинейные и поверхностные интегралы; применять основные формулы векторного анализа для вычисления работы силовых полей и потоков векторных полей	Аудиторная контрольная работа	Экзамен: Задания

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32

- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36 Экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф	Ф Ф Ф
Тема 1. Векторные функции	4	2	0	2	2
Тема 2. Криволинейные интегралы	18	6	6	12	6
Тема 3. Поверхностные интегралы	24	6	10	16	8
Тема 4. Теория поля	34	8	12	20	14
Тема 5. Градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в ортонормированных криволинейных координатах	14	4	4	8	6
Тема 6. Тензоры	6	2	0	2	4
Тема 7. Элементы дифференциальной геометрии	6	4	0	4	2
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1 Векторные функции.

Непрерывность векторных функций, годограф непрерывной векторной функции, дифференцируемость скалярных и векторных функций одной и многих переменных, частные производные, многомерная формула Тейлора, остаточный член формулы Тейлора.

Тема 2 Криволинейные интегралы.

Пространственные кривые, длина гладкой кривой, криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, их вычисление с помощью определенных интегралов, ориентации областей и их границ на плоскости, формула Грина для плоской замкнутой ограниченной области, независимость от пути интегрирования для односвязной области.

Тема 3 Поверхностные интегралы.

Способы задания поверхностей в пространстве, нормаль и касательная плоскость гладкой поверхности, ориентируемые и неориентируемые поверхности, двусторонние и односторонние поверхности, площадь гладкой поверхности, поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода, сведение поверхностных интегралов к

двойным интегралам, физические приложения поверхностных интегралов. простые цилиндрические области, формула Гаусса-Остроградского и её физический смысл, формула Стокса её физический смысл. Тема 4 Теория поля.

Скалярные поля и поверхности уровня скалярного поля, векторные поля и их векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий, функции множеств и их производные, инвариантное определение градиента, его вычисление в ортогональных координатах и его свойства, производная по направлению, сфера производных по направлению, оператор Гамильтона, поток векторного поля через ориентированную поверхность, инвариантное определение дивергенции, ее вычисление в ортогональных координатах и ее свойства, инвариантная форма формулы Гаусса-Остроградского, вращение векторного поля вдоль ориентированной поверхности, инвариантное определение ротора, его вычисление в ортогональных координатах и его свойства, дифференциальные операторы первого и второго порядка, оператор Лапласа, потенциальные поля, критерий потенциальности, циркуляция векторного поля вдоль кривой, инвариантная форма формулы Стокса, соленоидальные поля, критерий соленоидальности, инвариантность потока ротора соленоидального поля через поверхности, натянутые на фиксированный контур, векторная трубка и её физический смысл, инвариантность потока соленоидального поля через сечения векторной трубки, лапласовы поля, основная теорема векторного анализа.

Тема 5 Градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в ортонормированных криволинейных координатах. Основной и взаимный базисы, определение криволинейных координат, локальный базис криволинейной системы координат, координатные линии и координатные поверхности, ортогональные криволинейные координаты, коэффициенты Ламэ, вычисление градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в ортонормированных криволинейных координатах, сферические и цилиндрические координаты.

Тема 6 Тензоры.

Преобразование векторов, линейных и билинейных форм при переходе к новому базису, определение тензора типа и ранга $p+q$, линейное пространство тензоров одного типа, тензорное произведение, свертка тензора, перестановка индексов, симметричные и антисимметричные тензоры по двум и по совокупности индексов, тензоры в евклидовом пространстве, ко- и контравариантные метрические тензоры, ко- и контравариантные координаты вектора, подъём и опускание индексов, равносильные тензорные уравнения, тензорные поля, дивергенция тензорного поля.

Тема 7 Элементы дифференциальной геометрии.

Пространственные кривые, натуральный параметр, три формулы Френе-Серре, кривизна и кручение и их вычисление, трехгранник Френе-Серре и локальные уравнения проекций кривой на нормальную, спрямляющую и соприкасающуюся плоскости, первая квадратичная форма поверхности, вычисление длины кривой и площади на поверхности и вычисление угла между двумя кривыми на поверхности, вторая квадратичная форма поверхности, кривизна кривой на поверхности, теорема Менье, главные кривизны поверхности в точке, гауссова и средняя кривизна поверхности.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Кошелев В.Н., Саичев А.И., Уткин Г.А. Основы векторного анализа (учебное пособие). - Нижний Новгород: ННГУ, 2007.

Корчагин А.Б. Криволинейные и поверхностные интегралы (учебно-методическое пособие). - Нижний Новгород: ННГУ, 2010. http://www.unn.ru/books/met_files/OVTA.pdf

Кошелев В.Н., Саичев А.И., Уткин Г.А. Практикум по векторному анализу (учебное пособие) – Н.Новгород: ННГУ, 2006.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Вариант 1

Задача 1

(4251) Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$I = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy,$$

где \mathcal{L} – кривая, заданная уравнением $y = 1 - |1 - x|$ ($0 \leq x \leq 2$).

Задача 2

(4362) Не прибегая к формуле Гаусса-Остроградского, вычислить поверхностный интеграл 2-го типа:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} x dydz + y dzdx + z dxdy, \quad (*)$$

где \mathcal{S} – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Задача 3

(4387) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint_{\mathcal{S}} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

где \mathcal{S} – внешняя сторона границы куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

Вариант 2

Задача 1

(4253) Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$I = \int_{\mathcal{L}} (2a - y) dx + x dy,$$

где \mathcal{L} – арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Задача 2

Вычислить поверхностный интеграл 1-го типа:

$$I = \iint_S z^2 dS,$$

где S – поверхность, отсекаемая от верхней части конуса $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ цилиндром $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Задача 3

(4388) С помощью формулы Гаусса-Остроградского вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 1

Задача 1

Найти производную поля $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(x_0, y_0)$ по направлению, перпендикулярному к линии уровня поля u , проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$.

Задача 2

Показать, что напряженность $\vec{F}(M)$ поля сил тяготения в точке $M(x, y, z)$, создаваемого массой m , сосредоточенной в точке $O(0, 0, 0)$, является градиентом скалярного поля.

Задача 3

В установившемся потоке несжимаемой идеальной жидкости скорость каждой частицы направлена к началу координат и по величине равна $1/r^2$ (\vec{r} – радиус-вектор частицы). Вычислить количество жидкости, вытекающий из области V за единицу времени.

Задача 4

Доказать, что $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2(\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v)$.

Задача 5

Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + (x + y)\vec{k}$$

вдоль окружности C , полученной пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = x + y$ плоскостью $z = 1$.

Вариант 2

Задача 1

Найти векторные линии поля $\vec{A} = \vec{i}x + \vec{j}y - \vec{k}z$.

Задача 2

Показать, что центральное векторное поле

$$\vec{A} = \frac{f(r)}{r} \vec{r}$$

является потенциальным и найти его потенциал.

Задача 3

Привлекая формулу Стокса, вычислить поток ротора поля

$$\vec{A} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$$

через часть поверхности $z^2 = 4(1 - x^2 - y^2)^4$, "накрывающей" начало координат плоскости xOy .

Задача 4

Доказать, что

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

Во что трансформируется данное соотношение в случае если поле \vec{A} – соленоидальное, потенциальное?

Задача 5

Найти поток векторного поля

$$\vec{A} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

из области V , ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	выполнено более 50% заданий
не зачтено	выполнено менее 50% заданий

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
Знания	Отсутствие знаний теоретического	Уровень знаний ниже минимальных	Минимально допустимы	Уровень знаний в объеме,	Уровень знаний в объеме,	Уровень знаний в объеме,	Уровень знаний в объеме,

	материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	требований. Имели место грубые ошибки	й уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	соответству ющем программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	соответству ющем программе подготовки . Допущено несколько несуществе нных ошибок	соответств ующем программе подготовк и. Ошибок нет.	превышающе м программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{A} = (3x + 2z)\vec{i} + (xy - z)\vec{j} - xyz\vec{k}$ вдоль линии пересечения параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$ с координатными плоскостями ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Вычислить поток поля $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где \vec{r} - радиус-вектор, а $f(r)$ - заданная функция его модуля.

Найти работу поля $\vec{A} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ по контуру $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = z^2$ ($z > 0$). Обход контура - по правому винту относительно оси z .

Вычислить поток поля $\vec{A} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через верхнюю полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z > 0$) с «дном» $z = 0$.

Найти работу поля $\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ по контуру, образованному пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 1$. Обход контура - по правому винту относительно вектора $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Вычислить поток поля $\vec{A} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ через поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z$ ($z > 0$) с “дном” $z = 0$.

Найти работу поля $\vec{A} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ по контуру $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = z$. Обход контура - по правому винту относительно оси z .

Вычислить поток поля $\vec{A} = 2xz\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 4$.

Найти работу поля $\vec{A} = 2xz\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x + 3y + 2z = 6$ с координатными плоскостями. Обход контура - в направлении чередования осей $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Найти работу поля $\vec{A} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ по контуру, образованному пересечением поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и $x^2 + y^2 = Rz$ ($z > 0$).

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько не грубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много не грубых

Оценка	Критерии оценивания
	ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний теоретического материала ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Буда́к Борис Михайлович. Кратные интегралы и ряды : учеб. для студентов физ. и физ.-мат. фак. ун-тов. - Изд. 3-е. - М. : Физматлит, 2002. - 512 с. : ил. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 2). - ISBN 5-9221-0300-8 : 162.00., 1 экз.
2. Буда́к Борис Михайлович. Кратные интегралы и ряды : [для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов]. - М. : Наука, 1965. - 607 с. : с черт. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова [и др.]. вып. 2). - 1.20., 16 экз.
3. Буда́к Борис Михайлович. Кратные интегралы и ряды : [учеб. для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов]. - Изд. 2-е, стер. - М. : Наука, 1967. - 607 с. : черт. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова [и др.] ; вып. 2). - 1974.00., 103 экз.
4. Кочин Николай Евграфович. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - Изд. 9-е. - М. : Наука, 1965. - 426 с. : черт. - 1.90., 4 экз.
5. Демидович Борис Павлович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов. - М. : АСТ : Астрель, 2010. - 558, [2] с. : ил. - ISBN 978-5-17-010062-0 (АСТ) : 348.00., 250 экз.

Дополнительная литература:

1. Арфкен Г. Математические методы в физике / сокр. пер. с англ. В. В. Чепкунова. - М. : Атомиздат, 1970. - 712 с. - 3.42., 2 экз.
2. Гольдфайн И. А. Векторный анализ и теория поля / под ред. Р. Г. Гутера. - 2-е изд. - М. : Наука, 1968. - 128 с. - 0.22., 1 экз.
3. Рашевский Петр Константинович. Риманова геометрия и тензорный анализ. - Изд. 3-е. - М. : Наука, 1967. - 664 с. : черт. - 2.63., 58 экз.
4. Джеффрис Гарольд. Методы математической физики : [в 3 вып.] : пер. с англ. Вып. 3 / под ред. В. Н. Жаркова. - М. : Мир, 1970. - 344 с. : с черт. - 2.00., 1 экз.
5. Джеффрис Гарольд. Методы математической физики : [в 3 вып.] : пер. с англ. Вып. 1 / под ред. В. Н. Жаркова. - М. : Мир, 1969. - 424 с. : с черт. - 1.74., 1 экз.
6. Джеффрис Гарольд. Методы математической физики : [в 3 вып.] : пер. с англ. Вып. 2 / под ред. В. Н. Жаркова. - М. : Мир, 1970. - 352 с. : с черт. - 1.22., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

http://www.unn.ru/books/met_files/OVTA.pdf

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки/специальности 11.05.02 - Специальные радиотехнические системы.

Автор(ы): Дубков Александр Александрович, доктор физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Якимов Аркадий Викторович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Павлов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 16.01.2024 г., протокол № №1.