МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

:

УТВЕРЖДЕНО
президиумом Ученого совета ННГУ
от 14.12.2021 г. протокол № 4

Рабочая программа дисциплины

Случайные процессы
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования
бакалавриат
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность
01.01.03 Механика и математическое моделирование
(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения
очная
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород
2022 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Случайные процессы» относится к обязательной части.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.30 Случайные процессы относится к обязательной части ООП направлению 01.01.03 Механика и математическое моделирование

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции** **Индикатор достижения компетенции*** (код, содержание индикатора)	**Результаты обучения по дисциплине****	**Наименование оценочного средства**
ОПК-1. Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	**ОПК-1.1**. **Знает** основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук.	**Знать** основные понятия теории случайных процессов, основные свойства и классификацию потоков событий.	*Собеседование*
	ОПК-1.2. **Умеет** анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук.	**Умеет** анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики,	*Задачи*
	ОПК-1.3. **Владеет навыками** применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач.	**Владеть** навыками вычисления вероятности состояний для цепи Маркова.	*Задачи*

3. Структура и содержание дисциплины «Случайные процессы»

Объем дисциплины составляет **2** зачетных единицы, всего 72 часов, из которых 33 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (32 часов - занятия лекционного типа, 1 час промежуточной аттестации), 39 часов – самостоятельная работа студента.

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения

	Всего	
Общая трудоемкость	**2 ЗЕТ**	
Часов по учебному плану	**72**	
в том числе		
аудиторные занятия (контактная работа): **- занятия лекционного типа** **- занятия семинарского типа** **- занятия лабораторного типа** **- текущий контроль (КСР)**	**49** **32** **16** **0** **1**	
самостоятельная работа	**23**	
Промежуточная аттестация – зачет		

Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, **форма промежуточной аттестации по дисциплине**	**Всего (часы)**	в том числе							
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					**Самостоятельная работа студента часы**		
		Занятия лекционного типа	**Практические занятия**	**Лабораторные работы**		**Всего контактных часов**	**СРС**		
Основные понятия теории случайных процессов.	8	4	2			6	2		
Потоки событий, их свойства и классификация. Некоторые свойства потоков Пальма. Потоки Эрланга.	10	4	2			6	4		
Предельные теоремы теории потоков.	10	4	2			6	4		
Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова). Граф состояний, классификация состояний, вероятности состояний.	12	6	2			8	4		
Стационарный режим для цепи Маркова.	8	4	2			6	2		
Описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова.	9	4	2			6	3		
Однородные марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения для предельных веро-	8	4	2			6	2		

ятностей.									
Преобразования случайных процессов	6	2	2			4	2		
В т.ч. текущий контроль	1					1			
Всего	72	32	16			49	23		
Промежуточная аттестация - зачет									

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

При проведении практических занятий по дисциплине «Случайные процессы», а также при выполнении студентами домашних, самостоятельных и контрольных работ, используются учебно-методические пособия и практикумы, разработанные автором программы. Самостоятельная работа обучающихся реализуется в следующих формах: выполнение домашних заданий по дисциплине; самостоятельное изучение некоторых теоретических вопросов.

a. Виды самостоятельной работы студентов

- Ознакомление с теоретическим материалом по источникам, указанным в списке литературы.
- Ответы на вопросы самоконтроля.

b. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

- Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2012.
- Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000.
- ВВЕДЕНИЕ В ОБЩИЕ ЦЕПИ МАРКОВА. Авторы: Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.: Учебно–методическое пособие – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1.Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	**Шкала оценивания сформированности компетенций**						
	плохо	**неудовлетворительно**	**удовлетворительно**	**хорошо**	**очень хорошо**	**отлично**	**превосходно**
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического	Уровень знаний ниже минималь-	Минимально допустимый уровень зна-	Уровень знаний в объеме, соответствую-	Уровень знаний в объеме, соответствую-	Уровень знаний в объеме, соответству-	Уровень знаний в объеме, превышаю-

	материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	ных требований. Имели место грубые ошибки.	ний. Допущено много негрубых ошибки.	щем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	щем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	ющем программе подготовки, без ошибок.	щем программу подготовки.
Умения	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
Навыки	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»

	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

На зачёте проверяется в основном способность решения практических задач.

Зачет.

Зачтено	выполнены задания тестирования, контрольных работ за семестр
Не зачтено	не выполнены задания тестирования и контрольных работ за семестр

5.2.1. Контрольные вопросы

Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций.

Для оценивания результатов обучения в виде знаний умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- тестирование;
- письменные ответы на вопросы;
- устные ответы на вопросы преподавателя;
- индивидуальное собеседование на итоговом зачете.

Критерий оценивания результатов тестирования

Баллы, %	***Оценка***
96-100	*Отлично*
71-95	*Хорошо*
51-70	*Удовлетворительно*
0-50	*Неудовлетворительно*

Критерии оценок выполнения контрольной работы

(каждая задача оценивается в 1 балл)

Решена полностью	1
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	0,5
Решение неверное, решение отсутствует	0

Суммарная оценка выполнения контрольной работы

Количество баллов	**Оценка**
5	Отлично
4,5	Очень хорошо
4 - 3,5	Хорошо
3 - 2,5	Удовлетворительно
2 - 1,5	Неудовлетворительно
1 - 0	Плохо

5.1. **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения**

Примеры тестовых вопросов:

1. Тип – множественный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Отметьте верные утверждения?

- Случайный процесс есть однопараметрическое семейство $\{\xi(t) : t \in T\}$ случайных элементов, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$. (+)
- Случайный процесс есть однопараметрическое семейство $\{\xi(t) : t \in T\}$ случайных элементов, заданных на разных вероятностных пространствах $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}_t(\cdot)), t \in T.$
- Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ может меняться непрерывно. (+)
- Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ может меняться дискретно. (+)

2. Тип – одиночный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Укажите ошибочное высказывание?

- Поточечное задание случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ заключается в определении при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ отображения $\xi(\omega, t)$: $\Omega \times T \to X,$ где X есть пространство состояний составного эксперимента E.
- Если $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом, то при каждом $t \in T$ имеет место свойство измеримости вида $\{\omega: \xi(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{F}$ для всех $B \in \Re$, где σ-алгебра $\Re$ суть подмножества множества X.
- Если $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом, то значение $\xi(\omega, t) \in X$ есть состояние составного эксперимента E в момент t или состояние эксперимента E_t.
- Пусть $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом и $(X, \Re)$ есть измеримое пространство его состояний. Тогда семейство $\{\mathbf{P}(\{\omega: \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}): t_1, t_2, \ldots, t_n \in T; B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re\}$ не является его конечномерным распределением. (+)

3. Тип – множественный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Укажите верные высказывания?

- Случайный процесс $\{\xi(t) : t \in T\}$ может быть дискретным по времени и по пространству. (+)
- Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и любых моментов $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется с независимыми приращениями.
- Случайный процесс $\{\xi(t) : t \in T\}$ может быть дискретным по времени и непрерывным по пространству. (+)
- Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1}) - \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется с независимыми сечениями.

4. Тип – ввод значения.

Пусть случайный процесс $\{\xi(t): \ -\infty < t < +\infty\}$ задается соотношением $\xi(\omega, t) = \eta(\omega)\sin(bt)$, где $\eta(\omega)$ является одномерной случайной величиной, $\mathrm{M}\eta = a, \mathrm{D}\eta = \sigma^2$ и b, a, σ являются постоянными величинами. Вычислить при $a = b = \sigma = 1, t = \pi/2, t_1 = 3\pi/2$ и $t_2 = 5\pi/2$ следующие характеристики этого процесса: 1) $\mathrm{M}(\xi(t))$; 2) $\mathrm{D}(\xi(t))$; 3) $\mathrm{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$.

Примечание: ответ следует вводить в виде знакового числа (напр., -7)

- #Ответ1#$\mathrm{M}(\xi(t))$=#1#
- #Ответ2#$\mathrm{D}(\xi(t))$=#1#
- #Ответ3#$\mathrm{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$=# –1#

5. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Укажите верные высказывания?

- Схема независимых испытаний Бернулли является цепью Маркова. (+)
- Схема независимых испытаний Бернулли не является однородной цепью Маркова.
- Если условные вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} \mid \{\omega: \xi_n = i\})$ не зависят от n, то схема Маркова называется однородной. (+)

- Пусть вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \dots, \xi_{n-1} = a_{n-1}, \xi_n = a_n\}) = p_j$ для всех $n, a_0, a_1, \dots, a_n, j \in \{0, 1, \dots\}$. Тогда схема Маркова является однородной. (+)

6. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний. Отметьте ошибочное утверждение?

- Если $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при каждом $n = 0, 1, \dots$ случайная величина $\eta_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$, то последовательность $\{\eta_n; n = 0, 1, \dots\}$ является неоднородной марковской цепью. (+)
- Если $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при каждом $n = 0, 1, \dots$ случайная величина $\eta_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$, то последовательность $\{\eta_n; n = 0, 1, \dots\}$ является однородной марковской цепью.
- Пусть условные вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ и $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = i\}) = p_i$ для всех $i, j = 0, 1, \dots$ Тогда $p_i \geq 0, p_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$.
- Однородная цепь Маркова может быть задана множествами $X = \{0, 1, \dots\}$, $T = \{0, 1, \dots\}$, начальным распределением $\{p_i: i = 0, 1, \dots\}$ и условными вероятностями перехода за одно испытание следующего вида $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}, \ i, j = 0, 1, \dots$

7. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \dots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \dots\}$ состояний. Укажите верные высказывания?

- Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$ и $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \dots$ Тогда $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$.
- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$ и $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и $j, i = 0, 1, \dots$, то $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$. (+)
- Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots)$, $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \dots$

Тогда $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова.

- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots)$, $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} \mid \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ Тогда $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова. (+)

8. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Укажите ошибочное утверждение?

- Пусть при $r = 1, 2, \ldots$ условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} \mid \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$.
- Если условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} \mid \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, r, i, j = 0, 1, \ldots$, то переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$. (+)
- Если условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} \mid \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(r)$, то имеет место равенство $p_{i,j}(k + r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}(k) p_{m,j}(r)$, где $r = 1, 2, \ldots$ и $k, i, j = 0, 1, \ldots$
- Пусть Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова и $p_{i,j}(r)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании в состояние с номером j в $(k + r)$-м испытании. Тогда имеет место соотношение $\Pi^n = \left\| p_{i,j}(n) \right\|_{i,j=0,1,\ldots}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

9. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Отметьте верные утверждения?

- Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = j\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за $n \geq 1$ шагов от состояния с номером

i в состояние с номером j для всех $i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда
$p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), j = 0, 1, \ldots$ (+)

- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = j\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$, то
$p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), j = 0, 1, \ldots$

- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = j\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j, то $p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n+1)$, где для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ (+)

- Пусть
$p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), \mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = i\}), \mathrm{p} = (p_0, p_1, \ldots)$ и
$p_{i,j}(n)$ переходная вероятность схемы Маркова за $n = 1, 2, \ldots$ шагов от состояния с номером i в состояние с номером j для всех $i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда
$\mathbf{p}^{(n)} = \mathrm{p}\left\|p_{i,j}(n)\right\|_{i, j = 0, 1, \ldots}$ (+)

10. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j. Укажите справедливое высказывание?

- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такие целые числа $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$, что одновременно $p_{i,j}(n_1) > 0$ и $p_{j,i}(n_2) > 0$. (+)
- Состояние с номером i назовём несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$.

11. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j. Укажите верные утверждения?

- Состояние с номером i назовём несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$, однако $p_{j,i}(n) = 0$ для всех $n \geq 1$. (+)
- Период $d(i)$ состояния с номером i есть наименьшее общее кратное всех натуральных чисел r, для которых $p_{i,i}(r) > 0$.
- Период $d(i)$ состояния с номером i есть наибольший общий делитель всех натуральных чисел r, для которых $p_{i,i}(r) > 0$. (+)
- Пусть период $d(i)$ любого состояния с номером i меньше двух и каждое состояние цепи Маркова может быть достигнуто из любого другого её состояния. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n)$ существует для каждой упорядоченной пары (i,j) и не зависит от i. (+)

12. Тип – ввод значения.

Пусть семейство $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ является цепью Маркова, для которой пространство состояний имеет вид $X = \{0, 1, 2\}$ и вероятности перехода за одно испытание равны: $p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,0} = p_{1,1} = 1/2, p_{2,0} = 1,\ p_{0,2} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = 0$. Вычислить следующие предельные вероятности: 1) p_0^*; 2) p_1^*; 3) p_2^*.

Примечание: ответ следует вводить в виде целого числа или несократимой дроби (m/n).

- #Ответ1# p_0^*=#1/2#
- #Ответ2# p_1^*=#1/2#
- #Ответ3# p_2^*=#0#

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. 35 экз.
2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2012. 196 экз.
3. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов.-М.: Наука, 1965. 46 экз.

б) дополнительная литература:

1. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.- М.: Наука, 1996. 8 экз.

2. Свешников А.А. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. – М.: Наука, 1970. 45 экз.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

1. Интернет-ресурсы электронного портала ИИТММ http://www.itmm.unn.ru/studentam/uchebno-metodicheskie-materialy/
2. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Лобачевского http://www.unn.ru/books/resources.html
3. Общероссийский математический интернет-портал http://mathnet.ru

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения аудиторных занятий требуется аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом. Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде, в электронных библиотеках и на кафедре математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.03 Механика и математическое моделирование

Автор ______________________Е.В. Пройдакова

Заведующий кафедрой _______________ Р.Г. Стронгин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 01.12.2021 года, протокол № 2.