

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Функциональный анализ и вариационное исчисление

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.03 - Механика и математическое моделирование

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.23 Функциональный анализ и вариационное исчисление относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук. ОПК-1.2: Умеет анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук. ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач.	ОПК-1.1: Знать: основы функционального анализа; основные понятия и аппарат классического вариационного исчисления, основные алгоритмы исследования линейных и нелинейных операторов в линейных нормированных пространствах и алгоритмы решения задач вариационного исчисления. ОПК-1.2: Уметь: определять тип оператора в линейном нормированном пространстве; решать типовые задачи на отыскание сопряженного оператора и вычисление спектрального радиуса линейного ограниченного оператора, на дифференцируемость по Фреше нелинейного оператора, на принцип сжимающих отображений; определять тип задачи вариационного исчисления; решать простейшие задачи каждого типа; строить вариационные модели простейшего типа.	Задачи	Зачёт: Задачи

		ОПК-1.3: Владеть: базовыми методами функционального анализа и классического вариационного исчисления.		
ОПК-2: Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности	ОПК-2.1: Знает основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования. ОПК-2.2: Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук. ОПК-2.3: Владеет навыками применения базовых знаний в области математического и алгоритмического моделирования, а также современный математический аппарат при решении задач профессиональной деятельности.	ОПК-2.1: Знать примеры прикладных задач, допускающих формализацию в виде задач классического вариационного исчисления. ОПК-2.2: Уметь формализовать в виде задачи вариационного исчисления прикладные задачи оптимизации, допускающие такую формализацию. ОПК-2.3: Владеть аналитическими методами вариационного исчисления.	Задачи	Зачёт: Задачи

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	43
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Измеримые множества.	10	3	3	6	4
Тема 2. Измеримые функции.	16	5	5	10	6
Тема 3. Линейные пространства и операторы.	14	4	4	8	6
Тема 4. Нелинейные операторы.	14	4	4	8	6
Тема 5. Простейшая задача вариационного исчисления.	20	6	6	12	8
Тема 6. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.	20	6	6	12	8
Тема 7. Изопериметрические задачи.	13	4	4	8	5
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	32	32	65	43

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Измеримые множества. Классификация множеств в пространстве R^n . Понятие и основные свойства измеримых множеств.

Тема 2. Измеримые функции. Понятие и основные свойства измеримых функций. Понятие сходимости почти всюду и сходимости по мере. Понятие и основные свойства интеграла Лебега. Теорема Фубини. Абсолютно непрерывные функции.

Тема 3. Линейные пространства и операторы. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры линейных нормированных пространств. Пространства со скалярным произведением. Понятие фундаментальной последовательности. Определение и примеры банаховых пространств. Определение и примеры гильбертовых пространств. Понятие, основные свойства и примеры линейных ограниченных операторов. Операции над линейными операторами. Понятие сопряженного пространства. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в лебеговом пространстве. Понятие и основные свойства сопряженного линейного оператора. Понятие и вычисление спектрального радиуса линейных ограниченных операторов, примеры.

Тема 4. Нелинейные операторы. Непрерывность и дифференцируемость по Гато и по Фреше нелинейных операторов в линейном нормированном пространстве, примеры. Принцип сжимающих отображений.

Тема 5. Простейшая задача вариационного исчисления. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления. Задача о брахистохроне. Понятия глобального минимума, слабого и сильного локального минимума. Необходимые условия слабого локального минимума. Достаточные условия глобального минимума. Необходимые и достаточные условия слабого и сильного локального минимума.

Тема 6. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления: случай вектор-функций, случай старших производных, случай двух независимых переменных.

Тема 7. Изопериметрические задачи. Простейшая изопериметрическая задача, задача Дидоны.
Простейшая изопериметрическая задача в векторной форме.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.

http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Задача 1. Доказать, что множество $X \subset R^2$ измеримо по Лебегу и найти его меру:

$$X = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq y < \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right\}, \text{ где } a > 0 - \text{фиксированное число.}$$

Задача 2. Доказать, что функция $f(x)$, $x \in R$, измерима по Лебегу: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ne^x)}{n^3 \sqrt{n}}$.

Задача 3. Найти сопряженный оператор к оператору:

$$A[z](t) = \int_{t_2}^{t_1} z(t_1, \xi) d\xi : L_p(\Pi) \rightarrow L_p(\Pi), \quad p \in (1, \infty), \quad \Pi = [0; T_1] \times [0; T_2].$$

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

Задача 4. Вычислить производную Фреше от оператора: $F[z] = \int_0^T z^3(t) dt : L_3[0; T] \rightarrow R$.

Задача 6. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 [(y'')^2 - 48y] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	задачи решены правильно
не зачтено	задачи не решены или решены неправильно

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

	отказа обучающегося от ответа	ошибки	х задач с некоторым и недочетами	некоторым и недочетами	ошибок и недочетов	без ошибок и недочетов	
--	-------------------------------	--------	----------------------------------	------------------------	--------------------	------------------------	--

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Задача 1. Найти все допустимые экстремали в задаче:

$$J[y] = \int_0^1 (y')^2 dx \rightarrow \min, \quad K[y] = \int_0^1 y dx = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

Задача 2. Найти производную Фреше функционала:

$$F[z](t) = \iint_{\Pi} \exp z(t_1, t_2) dt_1 dt_2 : L_{\infty}(\Pi) \rightarrow R, \quad \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	задачи решены правильно
не зачтено	задачи не решены или решены неправильно

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Колмогоров Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учеб. для студентов мат. специальностей ун-тов. - Изд. 6-е, испр. - М. : Наука, 1989. - 623 с. : ил. - ISBN 5-02-013993-9 : 1.50., 89 экз.
2. Эльсгольц Лев Эрнестович. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник. - 5-е изд. - М. : Эдиториал УРСС, 2002. - 320 с. - ISBN 5-354-00135-8 : 117.00., 68 экз.

Дополнительная литература:

1. Гельфанд Израиль Моисеевич. Вариационное исчисление : учебник для ун-тов. - М. : Физматгиз, 1961. - 228 с. : черт. - 0.47., 17 экз.
2. Городецкий Василий Васильевич. Методы решения задач по функциональному анализу : [учеб. пособие для ун-тов по специальностям "Математика", "Приклад. математика"]. - Киев : Вища школа, 1991. - 477, [2] с. - 2.10., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.03 - Механика и математическое моделирование.

Автор(ы): Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Баландин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Иванченко Михаил Васильевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.