

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория вероятностей и математическая статистика

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.21 Теория вероятностей и математическая статистика относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2: Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний ОПК-1.3: Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знать: - общие вопросы о мировоззренческих взглядах на случайные явления и на функционирование процессов в условиях неопределенностей; 1) предмет теории вероятностей; 2) основы аксиоматического подхода при изучении реальных статистически устойчивых экспериментов; 3) методы математического описания количественных показаний различных измерителей результатов статистически устойчивого эксперимента; 4) вероятностные свойства одномерных и многомерных случайных величин; 5) числовые характеристики одномерных и многомерных случайных величин; 6) различные типы зависимостей между случайными величинами; 7) простейшие типы предельных теорем в теории вероятностей; 8) основы аппроксимации случайных величин и их законов распределения; 9) предмет математической статистики; 10) соотношение между	Задачи Контрольная работа Собеседование Тест	Экзамен: Задачи

		<p>предметом теории вероятностей и предметом математической статистики;</p> <p>11) основные задачи математической статистики;</p> <p>12) методы вычисления выборочных характеристик статистически устойчивого эксперимента;</p> <p>ОПК-1.2:</p> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- анализировать и использовать основы знаний теории вероятностей и математической статистики для формирования философской позиции на случайные явления, процессы и эксперименты;</li> <li>- обладать способностью к разработке методов изучения различных количественных характеристик реальных статистически устойчивых процессов;</li> <li>- понимать различные подходы предсказания случайных явлений на основе понятий сходимости последовательности случайных величин;</li> <li>- собирать, обрабатывать и интерпретировать статистические данные современных научных наблюдений над сложными экспериментами в условиях разного рода неопределенностей;</li> <li>- обладать способностью к проверке гипотезы о виде распределения с помощью критерия хи-квадрат Пирсона.</li> </ul> <p>ОПК-1.3:</p> <p>Владеть:</p> <p>1) методами теории вероятностей, математической статистики</p>		
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

		и теории случайных процессов, которые позволяют изучить свойства реальных процессов и явлений, функционирующих в условиях случайных факторов, неопределенностей и получения дополнительной информации; 2) способами научного анализа экспериментальных данных, относящихся к массовым явлениям, с целью определения некоторых обобщающих эти данные характеристик, и выявление статистических закономерностей наблюдаемого процесса, для которого не все условия его проведения известны.		
ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1: Знает математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности и методы их модификации ОПК-3.2: Умеет использовать, анализировать и модифицировать математические модели в современном естествознании и технике ОПК-3.3: Имеет практический опыт применения математических моделей для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1: Знать: -основы современной теории вероятностей, с целью разработки и анализа моделей решаемых конкретных задач; понимать различные подходы вычисления априорных и условных вероятностей наступления случайных исходов статистически устойчивых экспериментов сложной природы; - различные способы компьютерного моделирования случайных величин различного типа;  ОПК-3.2: Уметь: 1) строить адекватные вероятностные модели экспериментов и их количественных измерителей; 2) проводить анализ вероятностных свойств количественных характеристик элементарных исходов статистически устойчивых экспериментов; 3) применять методы моделирования типа Монте-Карло простейших ситуаций	Задачи Контрольная работа Собеседование Тест	Экзамен: Задачи

		<p>стохастического характера с использованием статистических пакетов и компьютерных технологий;</p> <p>4) доказывать предельные теоремы с целью аппроксимации результатов измерений исходов экспериментов;</p> <p>5) обрабатывать и анализировать экспериментальные данные;</p> <p>6) исследовать простейшие марковские последовательности</p> <p>ОПК-3.3:</p> <p>Владеть:</p> <p>1) способностью к разработке методов изучения реальных случайных процессов с не полностью известными условиями их проведения или наблюдения;</p> <p>2) способностью к разработке программного обеспечения для моделирования случайных величин с различным распределением;</p> <p>3) навыками интерпретации вероятностных свойств случайных экспериментов, для которых все основные условия их проведения известны;</p> <p>4) навыками восстановления вероятностных свойств случайных экспериментов, для которых не все условия их проведения известны; 5) применением методов вероятностного и имитационного моделирования простейших ситуаций стохастического характера с использованием статистических пакетов и компьютерных технологий.</p> <p>Владеть:</p> <p>практическими навыками восстановления вероятностных свойств:</p> <p>1) случайных экспериментов, для которых не все условия их проведения известны;</p>		
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

		2) измерителей элементарных исходов случайных экспериментов, для которых не все условия их проведения известны.		
--	--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	48
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>26</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Последовательности случайных величин и предельные теоремы.	16	6	6	12	4
Тема 2. Элементы математической статистики.	26	6	16	22	4
Тема 3. Точечное оценивание неизвестного параметра.	16	6	6	12	4
Тема 4. Интервальное оценивание неизвестного параметра.	16	6	6	12	4
Тема 5. Проверка статистических гипотез.	24	6	12	18	6
Тема 6. Элементы теории случайных процессов.	8	2	2	4	4
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	32	48	82	26

## Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Различные виды сходимостей последовательности случайных величин (сходимость по вероятности, сходимость почти всюду, сходимость в среднем, сходимость по распределению). Первая лемма Бореля – Кантелли. Связь между различными типами сходимостей. Классификация предельных теорем. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Закон больших чисел в форме Чебышева. Усиленный закон больших чисел и теорема Бернулли. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова.

Тема 2. Предмет математической статистики и ее связь с теорией вероятностей. Прикладные задачи математической статистики. Основные понятия математической статистики: наблюдаемая совокупность статистически устойчивого эксперимента, генеральная совокупность, выборочная совокупность, статистический и вариационный ряды, информационная статистическая таблица. Статистические (эмпирические) законы распределения случайных величин. Статистические (выборочные) числовые характеристики измерителей исходов статистически устойчивого эксперимента.

Тема 3. Понятие оценки неизвестного параметра. Основные требования для оценок неизвестного параметра (несмещенность, состоятельность, эффективность). Характеристика точности и надежности оценки неизвестного параметра. Неравенство Рао – Крамера и критерий эффективности оценок. Методы построения оценок для неизвестных параметров законов распределения случайных величин: минимума хи-квадрат, максимального правдоподобия, моментов.

Тема 4. Определение доверительного интервала. Построение доверительного интервала с использованием точечной оценки параметра. Построение доверительного интервала с помощью центральной статистики. Построение доверительного интервала в случае, когда неизвестный параметр является математическим ожиданием, дисперсией или вероятностью случайного события.

Тема 5. Распределение Пирсона (хи-квадрат распределение). Статистические гипотезы и критерий согласия для полностью известного гипотетического распределения случайной величины. Теорема Пирсона. Критерий согласия хи-квадрат в случае, когда необходимо оценивать неизвестные параметры закона распределения случайной величины. Теорема Фишера – Пирсона. Пример Бартлетта о построении вероятностной модели потока автомобилей на магистрали. Критерий Колмогорова о согласованности теоретической функции распределения и статистической функции распределения.

Тема 6. Определение случайных процессов и способы их задания. Классификация случайных процессов. Марковские цепи со счетным числом состояний. Классификация состояний марковской цепи по Колмогорову и основная предельная теорема марковских цепей. Процессы обслуживания. Управление конфликтными потоками.

## 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Федоткин М.А. Лекции по анализу случайных явлений. — Учебник. М.: Наука –Физматлит, 2016. 464 с. (250 экз.).
2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. — Учебник. М.: Наука – Физматлит, 2012. 608 с. (250 экз.).
3. Свешников А.А. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. - Санкт Петербург. Лань. 2012. 471 с. (350 экз.).
4. Ширяев А.Н. Вероятность - 1, 2. - М.: МЦНМО, 2011. 907 с. (200 экз.).
5. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. — Учебник. М.: Высшая школа, 2006. 368 с. (250 экз.).

6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Эдиториал УРСС, 2005. 448 с. (300 экз.).
7. Зорин А. В., Зорин В. А., Федоткин М. А. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. (Фонд образовательных электронных ресурсов: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/modelirovanie\\_s\\_v.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/modelirovanie_s_v.pdf))
8. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с. (100 экз.).
9. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. - М.: Гардарики, 1998. 328 с. (100 экз.).
10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Академия, 2003. 576 с. (300 экз.).
11. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. - М.: Высшая школа. 1992. 304 с. (100 экз.).
12. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974. 119 с. (100 экз.).
13. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. 648 с. (100 экз.).
14. Прохоров А.В. и др. Задачи по теории вероятностей. - М.: Наука, 1986. 328 с. (100 экз.).
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. - М.: Мир, 1984. Т. 1, 528 с. Т. 2, 738 с. (300 экз.).

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:**

1. Пусть достоверное событие  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  и  $P(w_1) = P(w_2) = 3/8$ ,  $P(w_3) = P(w_4) = 1/8$ ,  $A = \{w_1, w_3\}$ ,  $B = \{w_2, w_3\}$ ,  $C = \{w_2, w_3\}$ . Показать, что события  $A, B, C$  не являются независимыми в совокупности.
2. По цели производится 1000 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,002. Используя таблицы, вычислить вероятность того, что в результате стрельбы будет зафиксировано не менее четырёх попаданий.
3. Некто купил 300 карточек для игры в тираже "Спортлото 6 из 49". На каждой из этих карточек он случайным образом и независимо от остальных карточек отмечает только шесть из 49 различных видов спорта. Максимальный выигрыш на каждую карточку выпадает, если некто отметил на этой карточке шесть видов спорта, которые совпадают с непреднамеренным выбором шесть из 49 спортивных номеров лотерейной комиссией. Какова вероятность того, что некто получит ровно два максимальных выигрыша?

#### **5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:**



1. События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы в совокупности и вероятность  $P(A_k) = p_k$ . Найти вероятности следующих событий: 1) не произойдет ни одного из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; 2) произойдет хотя бы одно из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; 3) произойдет одно и только одно из событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

2. Найти закон распределения случайной величины  $h(w) = (x(w))^2 + 2$ , если случайная величина  $X$  имеет плотность  $f_X(x) = s^{-1}(2p)^{-1/2} \exp\{-x^2/(2s^2)\}$ ,  $s > 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ .

3. Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  являются попарно некоррелированными случайными величинами. Найти коэффициент корреляции  $\text{corr}(h_1, h_2)$  двух случайных величин  $h_1$  и  $h_2$ , где случайная величина  $h_1 = x_1 + x_2$  и случайная величина  $h_2 = x_3 + x_4$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Выполнены все или большая часть этапов решения задачи или задача решена с незначительными недочетами. Результаты работы представлены преподавателю в срок.
не зачтено	Выполнены не все практические задания или выполнены не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения заданий, получен неверный ответ, результаты работы не представлены преподавателю).

### 5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  суть результаты  $n$  независимых повторных наблюдений над случайной величиной  $X$ , распределенной по закону Пуассона с неизвестным параметром  $q > 0$ . Для оценки  $q$  выбрали функцию вида  $q_n^* = q_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  от результатов наблюдений. Определить, являются ли эта оценка несмещенной.

2. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  суть результаты  $n$  повторных независимых наблюдений над случайной величиной  $X$ , интегральная функция распределения которой  $F(x; q)$  известна с точностью до параметра  $q$ ,  $q \in Q \subset \mathbb{R}$ . И пусть оценка  $q_n^* = q_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть несмещенная оценка для  $q$ , причем  $D(q_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) < \infty$ . Определить, является ли  $(q_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n))^2$  несмещенной оценкой  $q^2$ .

3. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  суть результаты  $n$  независимых повторных наблюдений над случайной величиной  $X$  с плотностью распределения  $f(x; q)$ , которая равна  $(b - q)^{-1}$  при  $x \in (q, b)$  и равна нулю при  $x \notin (q, b)$ . Здесь  $b$  является известным параметром, а  $q < b$  есть неизвестный параметр. Для оценки неизвестного параметра  $q$  выбрали функцию  $q_n^* = q_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Определить, является ли выбранная оценка состоятельной.

### 5.1.4 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

1. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — результаты  $n$  повторных независимых наблюдений над случайной величиной  $X$ , функция распределения которой  $F(x; q_1, (q_2)_2)$  известна с точностью до параметров  $q_1$  и  $q_2$ , где  $q_1 = MX$ ,  $(q_2)_2 = DX$ . Для оценки параметра  $q_2$  выбрали функцию вида

$$Q_{n^*} = Q_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = (n-1)^{-1/2}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]^{1/2},$$

где  $\bar{x} = n^{-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ . Определить, является ли выбранная оценка параметра  $q_2$  несмещенной.

2. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — результаты  $n$  повторных независимых наблюдений над нормальной случайной величиной  $X$  с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией  $q = DX$ . В качестве оценки параметра  $q$  выбрана статистика вида  $Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = n^{-1}[(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2]$ . Определить, является ли данная оценка эффективной.

3. Методом моментов найти оценку неизвестных параметров  $q_2 > q_1$  случайной величины  $X$ , плотность распределения  $f_X(x; q_1, q_2)$  которой равна нулю при  $x \leq q_1$  и равна  $(q_2 - q_1)^{-1}$  при  $x \in (q_1, q_2)$ .

Методом моментов найти оценку неизвестных параметров  $q_1$  и  $0 < q_2 < 1$  непрерывной случайной величины  $X$ , плотность распределения  $f_X(x; q_1, q_2)$  которой определяется формулой  $q_2 f_1(x) + (1 - q_2) f_1(x - q_1)$ , где  $f_1(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\}$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент получил верный ответ во всех заданиях. При этом студент продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент получил верный ответ во всех заданиях.
очень хорошо	Студент получил верный ответ в большинстве заданий.
хорошо	Студент решил большую часть задач с незначительными недочетами.
удовлетворительно	Студент решил большую часть задач с существенными недочетами.
неудовлетворительно	Студент допускает грубые ошибки в решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

### 5.1.5 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Родители назначили своим сыновьям премию в случае успешной сдачи экзаменов в школе. Младший брат сдаёт экзамен с вероятностью  $7/10$ , а старший — с вероятностью  $0,25$ . Каким образом родители должны поделить премию между сыновьями, если экзамен сдал только один из сыновей, и родителям не сообщается, кто из них сдал экзамен?

2. В городах  $G_1$  и  $G_2$  непреднамеренно подбрасывают игральную кость и соответственно симметричную монету. Пусть событие  $A$  означает выпадение герба, а событие  $B$  состоит в том, что число выпавших очков есть простое число. Докажите независимость событий  $A$  и  $B$ .

3. После сборки компьютера проверяется надежность его функционирования путем запуска на этом компьютере специальной программы. Надежно собранный компьютер с вероятностью 0.999 дает правильный ответ с помощью тестовой программы. Если компьютер собран с ошибкой, то он лишь с вероятностью 0.01 дает правильный ответ с помощью тестовой программы. Компьютер считается надежным, если программа при пяти независимых запусках дает пять раз правильный ответ. Найти критическое множество  $S$  для проверки простой параметрической гипотезы  $H_0: p = 0,999$  против простой альтернативы  $H_1: p = 0,01$ . Вычислить вероятности ошибок первого и второго рода.

### 5.1.6 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

1. В квартире, состоящей из четырёх сообщающихся и равных по объёму комнат, находятся  $4n$  пылинок. Объём квартиры равен  $V$ . Определить вероятность того, что в первой комнате будет находиться ровно  $n$  пылинки.
2. Среди всех собранных компьютеров 98% являются не бракованными, 1% имеют устранимый брак и 1% компьютеров будут с неустраняемым браком. Вычислить вероятность того, что в результате купленных наудачу трёх компьютеров хотя бы один не бракованный и хотя бы один с устранимым браком.
3. Пусть двумерная случайная величина  $X = (X_1, X_2)$  равномерно распределена в квадрате  $C^2$ , стороны которого составляют углы  $\pi/4$  с осями координат и равны по длине единице. Найти функцию регрессии  $R_{X_2 | X_1}(x)$  случайной величины  $X_2$  по  $X_1$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Студент дал развернутый ответ на все вопросы без существенных ошибок.
не зачтено	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале.

### 5.1.7 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

н. Тип — однократный выбор.

Пусть  $\xi(\omega)$  является одномерной случайной величиной на  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Определить соотношение между событиями, которое является ошибочным.

- Событие  $\{\omega: \xi(\omega) \geq a\} = \Omega \setminus \{\omega: \xi(\omega) < a\}$ .
- Событие  $\{\omega: \xi(\omega) > a\} \neq \Omega \setminus \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a + 1/i\} \right)$ . (+)
- Событие  $\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$ .
- Событие  $\{\omega: \xi(\omega) = a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a + 1/i\} \setminus \{\omega: \xi(\omega) < a\}$ .

2. Пусть  $c \in R$  и  $\xi(\omega)$ ,  $\eta(\omega)$  являются случайными величинами. Определить утверждение, которое будет ошибочным.

- Функция  $c\xi(\omega)$  является случайной величиной.
- Функция  $c(\xi(\omega) + \eta(\omega))$  является случайной величиной.
- Функция  $c(\xi(\omega) - \eta(\omega))$  является случайной величиной.
- Функция  $|\xi(\omega)|$  не является случайной величиной. (+)

3. Тип — множественный выбор.

Пусть  $F(x)$  является интегральной функцией распределения случайной величины  $\xi$ . Определить правильные соотношения.

- Имеет место соотношение  $F(+\infty) \neq 1$ .
- Имеет место соотношение  $F(-\infty) = 0$ . (+)
- Имеет место соотношение  $F(+\infty) = 1$ . (+)
- Имеет место соотношение  $F(-\infty) \neq 0$ .

4. Тип — проверка ответов.

Пусть  $F(x)$  является интегральной функцией распределения сингулярной случайной величины  $\xi(\omega): \Omega \rightarrow [0, 1]$ .

Вычислить значение функции  $F(x)$  при: 1)  $x = 10/27$ ; 2)  $x = 20/27$ ; 3)  $x = 22/27$ .

Ответ для задачи 1):  $F(10/27) = 1/2$ ;

ответ для задачи 2):  $F(20/27) = 5/8$ ;

ответ для задачи 3):  $F(22/27) = 3/4$ .

## 5.1.8 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ОПК-3:

10. Тип — одиночный выбор.

Пусть  $F(x)$  является интегральной функцией распределения случайной величины  $\xi$ .

Определить правильное утверждение?

- Если  $-\infty < a < b < +\infty$ , то  $P(\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}) = F(a) - F(b)$ .
- Если  $-\infty < a < b < +\infty$ , то вероятность  $P(\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}) < F(a) - F(b)$ .
- Если  $-\infty < a < b < +\infty$ , то вероятность  $P(\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}) = F(b) - F(a)$ . (+)
- Если  $-\infty < a < b < +\infty$ , то вероятность  $P(\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}) > F(b) - F(a)$ .

11. Тип — одиночный выбор.

Пусть числовая последовательность  $\{a_n; n \geq 1\}$  удовлетворяет условиям:  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Определить верное соотношение.

- Имеет место  $P(\{\omega: \xi(\omega) < a\}) > P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\})$ .

23

- Имеет место  $P(\{\omega: \xi(\omega) < a\}) < P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\})$ .

- Имеет место соотношение  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\}) = F(a)$ . (+)

- Имеет место  $P(\{\omega: \xi(\omega) < a\}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\})$ .

12. Тип — множественный выбор.

Пусть числовая последовательность  $\{a_n; n \geq 1\}$  удовлетворяет условиям:  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots > a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Определить верные высказывания.

- Имеет место  $P(\{\omega: \xi(\omega) \leq a\}) > P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\})$ .
- Имеет место  $P(\{\omega: \xi(\omega) \leq a\}) < P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\})$ .
- Имеет место  $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\}) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} \{\omega: \xi(\omega) < a_n\})$ . (+)
- Имеет место соотношение  $P(\{\omega: \xi(\omega) \leq a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n)$ . (+)

## Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент получил верный ответ во всех заданиях. При этом студент продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент получил верный ответ во всех заданиях.
очень хорошо	Студент получил верный ответ в большинстве заданий.
хорошо	Студент решил большую часть задач с незначительными недочетами.
удовлетворительно	Студент решил большую часть задач с существенными недочетами.
неудовлетворительно	Студент допускает грубые ошибки в решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в

	ответа		Выполнены все задания, но не в полном объеме	ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

**5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

### ЗАДАЧА № 1

В системе координат  $XOY$  нарисованы прямоугольник  $\Pi = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ , квадрат  $K = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  и фигура  $\Phi$ , ограниченная линиями:  $y = x^2$ ,  $y = 4$ . В прямоугольник наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она попадет либо на квадрат  $K$ , либо на фигуру  $\Phi$ .

Ответ: искомая вероятность равна  $11/28$ .

### ЗАДАЧА № 2

В крупный маркет с 13 до 15 часов, равновозможно в любой момент времени из этого интервала, должны подойти два фургона с продуктами. В зависимости от ситуации первый из них может занимать место разгрузки либо 30 минут с вероятностью 0.4, либо 45 минут с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что второму фургону придется ожидать освобождения места разгрузки, но не более 15 минут.

Ответ: искомая вероятность приблизительно равна 0,092.

## 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-3

### ЗАДАЧА № 3

Стрелок, имея 4 патрона, производит выстрелы по мишени до первого попадания в нее или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле, независимо от других, равна величине  $\frac{1}{3}$ . Пусть случайная величина  $\xi$  определяет число израсходованных патронов. Вычислить

11

вероятность  $P(2 < \xi \leq 4)$  двумя способами: а) через ряд распределения, б) через функцию распределения.

Ответ: искомая вероятность равна  $4/9$ .

### ЗАДАЧА № 4

Найти закон распределения вероятностей случайной величины  $\eta = \xi_1 - \xi_2$ , если  $(\xi_1, \xi_2)$  – двумерная непрерывная случайная величина, имеющая двумерную плотность распределения вероятностей вида  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

### ЗАДАЧА № 5

В лотерее участвуют 500 человек. Условия лотереи таковы, что каждый из её участников, покупая билет за 100 рублей, может с вероятностью 0.008 выиграть приз стоимостью 10000 рублей. Найти вероятность того, что а) организаторы лотереи получат прибыль; б) убытки организаторов составят 10000 рублей; в) вычислить также среднюю прибыль данной лотереи.

Ответ: а) вероятность того, что организаторы лотереи получают прибыль, равна 0, 62884;

б) вероятность того, что убытки организаторов составят 10000 рублей, равна 0,1042;

в) значение средней прибыли данной лотереи равно 10000.

## Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент дал развернутый ответ на все вопросы и при этом продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент дал развернутый ответ на все вопросы.
очень хорошо	Студент дал ответ на все вопросы, возможно с незначительными недочетами.
хорошо	Студент ответил на большую часть вопросов с незначительными недочетами.

Оценка	Критерии оценивания
удовлетворительно	Студент ответил на большую часть вопросов с существенными недочетами.
неудовлетворительно	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале и решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

### Основная литература:

1. Федоткин Михаил Андреевич. Лекции по анализу случайных явлений : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям ВПО 010400 "Приклад. математика и информатика" и 010300 "Фундам. информатика и информ. технологии" / ННГУ. - М. : Физматлит, 2016. - 464 с. - ISBN 978-5-9221-1679-4 : 599.50., 250 экз.
2. Федоткин Михаил Андреевич. Модели в теории вероятностей : учебник. - М. : Физматлит : ННГУ, 2012. - 608 с. - (Библиотека Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского). - ISBN 978-5-9221-1384-7 : 600.00., 200 экз.
3. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций : учеб. пособие / под общ. ред. А. А. Свешникова. - Изд. 3-е, перераб. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2007. - 448 с. : ил. - (Лучшие классические учебники. Математика) (Классические задачки и практикумы) (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0708-8 : 271.92., 1 экз.
4. Ширяев Альберт Николаевич. Вероятность : учеб. для вузов по физ.-мат. направлениям : в 2 кн. Кн. 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - М. : Изд-во МЦНМО, 2004. - 520 с. - ISBN 5-94057-036-4. - ISBN 5-94057-105-0 (кн. 1) : 62.00., 1 экз.
5. Федоткин Михаил Андреевич. Основы прикладной теории вероятностей и статистики : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика" и по направлению "Прикладная математика и информатика". - М. : Высшая школа, 2006. - 368 с. : ил. - ISBN 5-06-005328-8 : 215.60., 183 экз.
6. Гнеденко Борис Владимирович. Курс теории вероятностей : [учебник]. - 7-е изд., испр. - М. : Эдиториал УРСС, 2001. - 320 с. - ISBN 5-8360-0400-5 : 166.80., 1 экз.
7. Зорин Андрей Владимирович. Моделирование случайных величин и проверка гипотез о виде распределения : учебно-методическое пособие / А. В. Зорин, В. А. Зорин, М. А. Федоткин ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 20 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=823611&idb=0>.

### Дополнительная литература:

1. Боровков Александр Алексеевич. Теория вероятностей : [учеб. пособие для мат. и физ. специальностей вузов]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1986. - 431 с. : с черт. - 1.40., 87 экз.



2. Бочаров Павел Петрович. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие. - М. : Гардарики, 1998. - 328 с. - (Univers). - ISBN 5-7762-0035-0 : 23.00., 1 экз.
3. Вентцель Елена Сергеевна. Теория вероятностей : учеб. для вузов. - 8-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2002. - 575 с. : ил. - ISBN 5-06-003650-2 : 78.65., 11 экз.
4. Ивченко Григорий Иванович. Математическая статистика : [учеб. пособие для вузов]. - 2-е изд., доп. - М. : Высшая школа, 1992. - 303, [1] с. : ил. - ISBN 5-06-002317-6 (в пер.) : 21.88., 1 экз.
5. Колмогоров Андрей Николаевич. Основные понятия теории вероятностей. - 2-е изд. - М. : Наука, 1974. - 119 с. - (Теория вероятностей и математическая статистика). - 0.33., 2 экз.
6. Крамер Гаральд. Математические методы статистики / пер. с англ. А. С. Мониной и А. А. Петрова ; под ред. А. Н. Колмогорова. - 2-е изд., стер. - М. : Мир, 1975. - 648 с. : ил. - 2.87., 18 экз.
7. Прохоров Александр Владимирович. Задачи по теории вероятностей : Основные понятия. Предел. Теоремы. Случайные процессы : [учеб. пособие для ун-тов по специальности "Математика" и "Прикладная математика"]. - М. : Наука, 1986. - 326, [1] с. - 1.20., 3 экз.
8. Феллер Вильям. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. Т. 1 / пер. с пересмотр. 3-го англ. изд. Ю. В. Прохорова ; предисл. А. Н. Колмогорова. - М. : Мир, 1984. - 527 с. : ил. - 2.60., 14 экз.
9. Феллер Вильям. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. Т. 2 / пер. со 2-го англ. изд. Ю. В. Прохорова. - М. : Мир, 1984. - 751 с. : граф. - 3.50., 15 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

- 1) Интернет-ресурсы электронного портала Института ИТММ;
- 2) Пакет программ «МОНТЕ» специализированное учебно-методическое программное обеспечение, разработанное на кафедре прикладной теории вероятностей и предназначенное для имитационного моделирования случайных статистически устойчивых экспериментов;
- 3) Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием:

1. ОС Microsoft Windows. Лицензия по подписке Microsoft Imagine, год продления подписки – 2016, срок подписки – 3 года, договор 39-3K-16
2. Microsoft Office 2007. Microsoft Open Licence, год покупки – 2007. Номер лицензии 42961270
3. Браузер Google Chrome. Предоставляется бесплатно на условиях лицензионных соглашений на программное обеспечение с открытым исходным кодом
4. Просмотрщик pdf-документов Adobe Reader. Бесплатное ПО (<https://get.adobe.com/ru/reader/otherversions>)
5. Антивирус Kaspersky. ПО приобретено в ноябре 2016 г для института ИТММ, ключ у сист. админ.
6. Microsoft Visual Studio. Лицензия по подписке Microsoft Imagine
7. Пакет программ «МОНТЕ» специализированное учебно-методическое программное обеспечение, разработанное на кафедре прикладной теории вероятностей с использованием среды разработки семейства Microsoft VisualStudio (лицензия по подписке MicrosoftImagine).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Федоткин Михаил Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.