

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением ученого совета ННГУ  
протокол от  
«30» ноября 2022 г. № 13

## **Рабочая программа дисциплины**

**Качественно–численные методы исследования динамических систем**

---

Уровень высшего образования  
**Бакалавриат**

---

Направление подготовки  
**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

---

Направленность образовательной программы  
**Прикладная математика и информатика (общий профиль)**

---

Форма обучения  
**очная**

---

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений. Код дисциплины по учебному плану Б1.В.ДВ.04.06.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.04.06 «Качественно-численные исследования динамических систем», относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
<b>ПК-13.:</b> Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<b>ПК-13.1.:</b> Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике	Знать – методы и приемы качественного исследования автономных и неавтономных динамических систем второго порядка; – качественно-численные методы построения параметрических и фазовых портретов динамических систем второго порядка.	собеседование
	<b>ПК-13.2.:</b> Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	Знать – схемы бифуркаций состояний равновесия и периодических движений динамических систем второго порядка	собеседование
	<b>ПК-13.3.:</b> Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования	Уметь – строить параметрические и фазовые портреты автономных и неавтономных динамических систем второго порядка; – устанавливать бифуркации, приводящие к возникновению и смене характера	контрольная работа

	математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности	устойчивости состояний равновесия и периодических движений; – выделять области притяжения устойчивых элементов	
	<b>ПК-13.4.:</b> Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований	Владеть опытом качественно – численного исследования конкретных динамических систем второго порядка и интерпретации полученных результатов.	практические задания

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>2 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	<b>33</b>
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- занятия лабораторного типа	0
- текущий контроль (КСР)	1
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>	

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них	лабораторная работа обучаю

		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
<b>1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования:</b> Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические систем. Фазовое пространство. Фазовые траектории. Математическая модель динамической системы. Примеры динамических систем. Задача исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портреты. Бифуркация.	8	2	2		4	4
<b>2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка:</b> Простые состояния равновесия. Фазовая плоскость линейной системы. Поведение фазовых траекторий нелинейной системы в окрестности состояния равновесия в случае действительных, комплексных, кратных корней характеристического уравнения. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Сложные состояния равновесия. Бифуркации состояний равновесия. Области притяжения устойчивых состояний равновесия.	16	4	4		8	8
<b>3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка:</b> Численный метод отыскания состояний равновесия и определения их типа. Численный метод построения сепаратрис седловых состояний равновесия. Численный метод построения фазовой траектории, выходящей из произвольной точки фазовой плоскости.	19	4	4		8	11
<b>4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями:</b> Сведение исследования структуры фазового пространства к точечному отображению плоскости в плоскость. Системы с цилиндрическим фазовым пространством. Типы периодических движений. Мультипликаторы. Бифуркации. Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивых, неустойчивых и седловых периодических движений. Области притяжения устойчивых периодических движений. Периодические движения колебательного и вращательного типов.	10	4	2		6	4

<b>5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений:</b> Численные методы отыскания и исследования устойчивости периодических решений неавтономных динамических систем второго порядка. Численный метод построения сепаратрисных инвариантных кривых точечного отображения плоскости в плоскость.	18	2	4		6	12
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация – зачет						
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>16</b>	<b>16</b>		<b>33</b>	<b>39</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа, контрольных работ, презентации результатов практических заданий.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

##### **Виды самостоятельной работы студентов:**

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка к выполнению письменной контрольной работы;
- подготовка к промежуточной аттестации.

##### **Проработка теоретического материала лекционных занятий**

Выполняется самостоятельно обучающимся с использованием материалов лекций и рекомендованной основной и дополнительной литературы. Контроль выполняется на практических занятиях.

##### **Подготовка к выполнению письменной контрольной работы**

Аудиторная контрольная работа проводится по материалам темы «Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка».

Для подготовки к контрольной работе рекомендуется повторно просмотреть материалы соответствующих лекций и практических занятий.

Разбор контрольной работы и исправление ошибок проводится в часы контроля самостоятельной работы студентов.

##### **Подготовка к промежуточной аттестации**

Фактором успешного прохождения промежуточной аттестации является систематическая работа студента в течение всего периода изучения дисциплины. В этом случае подготовка к зачету будет концентрированной систематизацией всех полученных знаний, умений и навыков.

В качестве методических материалов при подготовке к зачету рекомендуется использовать собственные конспекты лекций и рекомендованную основную и дополнительную литературу.

Допуском к зачету является выполнение письменной контрольной работы и презентаций результатов двух практических заданий.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

## Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

#### 5.2.1 Контрольные вопросы для зачета

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Фазовое пространство. Математическая модель динамической системы.	ПК-13.1
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.	ПК-13.1
3. Задача качественного исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портрет. Бифуркация.	ПК-13.1
4. Состояния равновесия автономной динамической системы второго порядка. Простое и сложное состояние равновесия.	ПК-13.1
5. Типы простых состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.	ПК-13.1
6. Устойчивость траекторий динамических систем. Непрерывная зависимость от начальных условий и параметров.	ПК-3.1
7. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными различными характеристическими корнями одного знака.	ПК-13.1
8. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными	ПК-13.1

характеристическими корнями разных знаков.	
9. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными равными характеристическими корнями.	ПК-13.1
10. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с комплексными характеристическими корнями, имеющими не равную нулю действительную часть.	ПК-13.1
11. Состояние равновесия автономной динамической системы второго порядка с чисто мнимыми характеристическими корнями.	ПК-13.1
12. Типы сложных состояний равновесия автономной динамической системы.	ПК-13.1
13. Исследование сложного состояния равновесия с $\sigma \neq 0$ .	ПК-13.1
14. Исследование сложного состояния равновесия с $\sigma = 0$ .	ПК-13.1
15. Бифуркации состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.	ПК-13.2
16. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка.	ПК-13.1
17. Неавтономные динамические системы 2-го порядка с периодическими правыми частями. Метод точечных отображений.	ПК-13.1
18. Периодические решения неавтономных систем второго порядка с периодическими правыми частями. Мультипликаторы.	ПК-13.1
19. Бифуркации периодических решений неавтономных систем второго порядка с периодическими правыми частями.	ПК-13.2
20. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений.	ПК-13.1

### 5.2.2. Типовая контрольная работа для оценки сформированности компетенции ПК-13.3

Дана система 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x(y + a) \\ \dot{y} = x + by \end{cases}.$$

#### Задание 1.

Аналитически найти состояния равновесия и исследовать их тип и характер устойчивости.

#### Задание 2.

На плоскости параметров построить бифуркационные диаграммы состояний равновесия, содержащие области их существования и устойчивости.

#### Задание 3.



Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей.

#### Задание 4.

Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

#### 5.2.3. Типовые практические задания для оценки сформированности компетенции ПК-13.4

1. Дана автономная система 
$$\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - a \\ \dot{y} = -y^2 - ax + b \end{cases}.$$

Качественно – численными методами найти состояния равновесия и исследовать их тип и характер устойчивости. На плоскости параметров построить бифуркационные диаграммы состояний равновесия, содержащие области их существования и устойчивости. Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей. Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

2. Дана неавтономная система 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b - hy - (a + v \sin t) \sin x \end{cases}.$$

Качественно – численными методами исследовать периодические колебательные движения:

- Найти соответствующие им неподвижные точки точечного отображения Т, порожденного фазовыми траекториями, исследовать их тип и характер устойчивости.
- На плоскости параметров  $a, v$  при фиксированных значениях параметров  $b, h$  построить бифуркационные диаграммы периодических колебаний, содержащие области их существования и устойчивости.
- Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей.
- Для каждой области построить фазовый портрет отображения Т.

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М.: Наука, 1967. (127 экз)
2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1972. (68 экз)

б) дополнительная литература:

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. (357 экз)
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. - М.: Наука, 1976; 1990. (34 экз)
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1987. (80 экз)

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.

Электронный ресурс: [https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21\\_i1/pdf/14.pdf](https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21_i1/pdf/14.pdf)

2. Киселева Н.В. Электронный образовательный ресурс по качественно-численным методам исследования неавтономных динамических систем // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 281-292.

<http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/364/301>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Наличие рекомендованной литературы.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Компьютерный класс с ОС Microsoft Windows и установленными комплектами лицензионных математических пакетов MatLab (лаб.220 2-го корпуса):

- Операционные системы семейства Microsoft Windows, – лицензия по подписке MicrosoftImagine;
- Математический пакет MatLab, – лицензионное ПО приобретено в 2006/2007 гг при выполнении нац. проекта «Образование», бессрочная лицензия, ключ у системного администратора.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ТУиДС Киселева Н.В.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ТУиДС: д.ф.-м.н. Осипов Г.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.