

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Уравнения математической физики

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.13 Уравнения математической физики относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-2: Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1: Знает математические модели современных задач естествознания, техники, экономики и управления, основы разработки, анализа и внедрения новых математических моделей ОПК-2.2: Умеет разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении ОПК-2.3: Владеет навыками разработки, анализа и внедрения новых математических моделей	ОПК-2.1: Знает классификацию уравнений математической физики, основные задачи для уравнений математической физики, общие схемы основных методов математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач  ОПК-2.2: Умеет математически корректно ставить задачи, применять методы математической физики при решении задач, разрабатывать, использовать и исследовать математические модели в различных областях науки и техники  ОПК-2.3: Имеет навыки математически корректной постановки задач математической физики, исследования математических моделей, применения методов математической физики при решении различных задач	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы Задания  Экзамен: Контрольные вопросы

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>7</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>252</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>64</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>64</b>
- КСР	<b>3</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>85</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен, Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными	1	1		1	
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка	12	4	4	8	4
3. Вывод основных уравнений математической физики	9	3	2	5	4
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера	16	4	6	10	6
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа	16	4	6	10	6
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны	10	4	2	6	4
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности	14	4	4	8	6
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны	14	4	4	8	6
9. Задача Штурма–Лиувилля	15	4	4	8	7
10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах	18	4	6	10	8
11. Специальные функции математической физики	14	4	4	8	6
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула	20	6	6	12	8

Пуассона					
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина	22	6	8	14	8
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций	14	6	2	8	6
15. Элементы теории потенциала	18	6	6	12	6
Аттестация	36				
КСР	3			3	
Итого	252	64	64	131	85

### Содержание разделов и тем дисциплины

5 семестр:

1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка
3. Вывод основных уравнений математической физики
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны.
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны
9. Задача Штурма–Лиувилля

6 семестр:

10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах
11. Специальные функции математической физики
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула Пуассона
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций
15. Элементы теории потенциала

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс ""Уравнения математической физики (Дерендяев Н.В.), Уравнения математической физики 5, Уравнения математической физики 6" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6176>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1656>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1657>).

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Используя формулу Даламбера, найти решение задачи:  
$$U_{tt} = U_{xx} + \sin x, U|_{t=0} = x, U_t|_{t=0} = x.$$
2. Определить решение начальной задачи для однородного волнового уравнения в точке  $x=\pi/2$ . Начальные функции имеют вид:  
$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} V_0, & x \vee \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

Вариант 2 контрольной работы №1

1. Полуограниченной струне со свободным концом  $x=0$  в начальный момент времени  $t=0$  с помощью поперечного удара передается импульс  $I$  в точках  $x = x_0, x = 4x_0$ . Найти отклонения точек струны в момент времени  $t = \frac{3x_0}{\gamma a}$ .
2. Найти решение начально-краевой задачи:  
$$U_{tt} - 4U_{xx} = 0, x > 0, t > 0$$
  
$$U|_{t=0} = 2 - x, U_t|_{t=0} = 2, (U_t + 3U_x)|_{x=0} = 3t - e^t$$

Вариант 3 контрольной работы №1

1. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ( $x=0$ ) свободен, а другой ( $x=\pi$ ) закреплен жестко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:  
$$U|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, U_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}$$
2. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на конце  $x=0$  и подверженной на конце  $x = l$  действию силы  $A \sin \omega t$ . Начальные условия нулевые. Найти решение при всех  $0 < t < \frac{3l}{\gamma a}$ .

Вариант 1 контрольной работы №2

1. К струне, один конец которой ( $x=0$ ) свободен, а другой ( $x=l$ ) закреплен жестко, с момента времени  $t=0$  приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью  $f(x,t) = A \sin \omega t$ . Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.
2. Найти стационарную температуру в круглом цилиндре с радиусом основания  $r_0$  и высотой  $h$ , если температуры нижнего и верхнего оснований равны соответственно  $T_0$  и  $T_0 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)$ , а боковая поверхность цилиндра теплоизолирована.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Контр. работа решена верно или допущены незначительные ошибки
не зачтено	Контр. работа не решена или допущены грубые ошибки

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
Знания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место	Минимально допустимый уровень знаний.	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, превышающем программу

	оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	грубые ошибки	Допущено много негрубых ошибок	программе подготовки . Допущено несколько негрубых ошибок	программе подготовки . Допущено несколько несущественных ошибок	программе подготовки и. Ошибок нет.	подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами .	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»
--	-------	---

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1.	Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.
2.	Преобразование к каноническому виду уравнения гиперболического типа.
3.	Преобразование к каноническому виду уравнения параболического типа.
4.	Преобразование к каноническому виду уравнения эллиптического типа.
5.	Выведение уравнения малых поперечных колебаний струны. Сформулируйте начальную и начально-краевую задачи.
6.	Определение обобщенной функции. Какие возможны действия с обобщенными функциями.
7.	Задача Штурма–Лиувилля. Доказательство свойств собственных функций и собственных значений.
8.	Метод разделения переменных на примере решения начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения. Обоснование полученного решения.
9.	Теорема единственности решения начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа.
10.	Сведение решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа к решению системы интегральных уравнений.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы верны или содержат незначительные ошибки
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

Уравнения свободных колебаний струны. Формула Даламбера для общего решения этого уравнения.
Задача Коши для уравнений свободных колебаний струны. Формула Даламбера для решения задачи Коши.
Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных.
Задача о колебаниях <u>полубесконечной</u> струны с закрепленным концом. Метод продолжения.
Задача о колебаниях <u>полубесконечной</u> струны со свободным концом. Метод продолжения.
Задача о граничном режиме для <u>полубесконечной</u> струны.
Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Постановка основных задач.
Теорема о единственности решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны.
Задача Коши для вынужденных колебаний бесконечной струны.
Метод разделения переменных для свободных колебаний ограниченной струны со свободными концами.
Обоснования метода разделения переменных для ограниченной струны со свободными концами.
Метод разделения переменных для вынужденных колебаний ограниченной струны с закрепленными концами.
Задача Штурма–Лиувилля. Свойство решений задачи. Вещественность собственных значений и собственных функций (с доказательством).
Задача Штурма–Лиувилля. Свойство решений задачи. Ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям (с доказательством).
Задача Штурма–Лиувилля. Свойство решений задачи. Линейная зависимость собственных функций, соответствующих одному собственному значению (с доказательством).

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	знание основного и дополнительным материала без ошибок
отлично	знание основного материала без ошибок и погрешностей
очень хорошо	знание основного материала с незначительными погрешностями
хорошо	знание основного материалом с рядом заметных погрешностей
удовлетворительно	знание основного материала с рядом негрубых ошибок
неудовлетворительно	наличие грубых ошибок в основном материале
плохо	отсутствие знаний материала

### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-2



7. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце, и подверженной на конце действию возмущающей гармонической силы.
8. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболы вращения, а начальные скорости равны нулю.

9. Решить смешанную задачу

$$1. u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 5 \sin \frac{5\pi x}{l}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, t)|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l}, u_t(x, t)|_{t=0} = 0, (x \in (0, l), t > 0).$$

$$2. u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 7 \sin \frac{7\pi x}{l}$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0, u(x, t)|_{t=0} = 0, u_t(x, t)|_{t=0} = 2 \sin \frac{2\pi x}{l}, (x \in (0, l), t > 0).$$

$$3. u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 3 \sin \frac{3\pi x}{2l}$$

$$u_{xx}(0, t) = u_x(0, t) = 0, u(x, t)|_{t=0} = 5 \sin \frac{5\pi x}{2l}, u_t(x, t)|_{t=0} = 0, (x \in (0, l), t > 0).$$

$$4. u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = \sin \frac{\pi x}{2l}$$

$$u_{xx}(0, t) = u_x(0, t) = 0, u(x, t)|_{t=0} = 0, u_t(x, t)|_{t=0} = 7 \sin \frac{7\pi x}{2l}, (x \in (0, l), t > 0).$$

$$5. u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 3 \cos \frac{3\pi x}{2l}$$

$$u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \cos \frac{\pi x}{2l}$$

$$u_t(x, t)|_{t=0} = 0$$

$$(x \in (0, l), t > 0).$$

$$6. u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 5 \cos \frac{5\pi x}{2l}$$

$$u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0$$

$$u(x, t)|_{t=0} = 0$$

$$u_t(x, t)|_{t=0} = 3 \cos \frac{3\pi x}{2l}$$

$$(x \in (0, l), t > 0).$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задания решены верно или допущены незначительные ошибки
не зачтено	Задания не решены или допущены грубые ошибки

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Тихонов Андрей Николаевич. Уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов. - Изд. 5-е, стер. - М. : Наука, 1977. - 736 с. - 1.80., 56 экз.
2. Сборник задач по уравнениям математической физики / ВЛАДИМИРОВ В.С., ВАШАРИН А.А., КАРИМОВА Х.Х., МИХАЙЛОВ В.П., СИДОРОВ Ю.В., ШАБУНИН М.И. - Москва : Физматлит, 2004., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=639801&idb=0>.
3. Калинин А. В. Введение в современные методы математической физики : учебное пособие / Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2014. - 120 с. - Рекомендовано учёным советом механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся в академической магистратуре по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Физика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729777&idb=0>.
4. Жидков А. А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с

частными производными : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. А., Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 82 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730395&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Дерендяев Николай Васильевич. Проекционный метод Фурье : учебно-методическое пособие / Н. В. Дерендяев, А. В. Калинин ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 75 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851280&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6176>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1656>, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=1657>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.