

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Физический факультет**

---

Утверждено

решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «31» мая 2023 г. № 6

**Рабочая программа дисциплины**

**Векторный и тензорный анализ**

Уровень высшего образования  
**бакалавриат**

Направление подготовки / специальность  
**09.03.02 Информационные системы и технологии**

Направленность образовательной программы  
**Информационные системы и технологии в физических  
исследованиях**

Форма обучения  
**очная**

Год начала подготовки

2022 год

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» (Б1.О.05.05) относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана ООП.

Дисциплина преподается в 3 семестре.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции  |  | Наименование оценочного средства |
|--|--|--|----------------------------------|
|  | Индикатор достижения компетенции*<br>(код, содержание индикатора)  | Результаты обучения по дисциплине**  |                                  |
| ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности | ОПК-1.1. Знать основы высшей математики, общей физики, теории вероятности и технологий программирования.   | Знать основные теоретические положения, теоремы векторного анализа, правила преобразования тензорных величин, свойства и правила обращения с тензором Леви-Чивита и тензором Кронекера, определения и способы расчета градиента скалярной функции, дивергенции и ротора векторного поля. | Собеседование                    |
|  | ОПК-1.2. Уметь решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования. | Уметь решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания основ векторного и тензорного анализа.  | Задача                           |
|  | ОПК-1.3. Иметь навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.   | Владеть навыками расчёта градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля, навыками преобразования компонент тензора при повороте декартовой системы координат, навыками использования интегральных теорем векторного анализа.  | Задача                           |

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

| Очная форма обучения                    |       |
|---|-------|
| Общая трудоемкость                      | 2 ЗЕТ |
| Часов по учебному плану                 | 72    |
| в том числе                             |       |
| аудиторные занятия (контактная работа): | 33    |
| - занятия лекционного типа, ч           | 16    |
| - практические занятия, ч               | 16    |
| - лабораторных, ч                       |       |
| самостоятельная работа, ч               | 39    |
| Промежуточная аттестация                | зачет |

#### 3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),   | Всего (часы) | В том числе  |                      |                            |       | Самостоятельная работа, часы |
|---|--------------|--|----------------------|----------------------------|-------|------------------------------|
|   |              | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них |                      |                            |       |                              |
|   |              | Занятия лекционного типа   | Практические занятия | Занятия лабораторного типа | Всего |                              |
| <b>1. Векторная алгебра.</b><br>Понятие линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Декартова систем координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат. Матрица поворота и ее свойства. | 8            | 2  | 2                    | –                          | 4     | 4                            |
| <b>2. Тензорная алгебра.</b><br>Определение тензора. Ранг тензора. Сложение, умножение тензоров. Свертка. Скалярное умножение тензоров.   | 10           | 3  | 2                    | –                          | 5     | 5                            |

|  |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |
|--|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Теорема деления.   |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |
| <b>3. Приложения теории тензоров.</b> Симметрия тензоров. Инвариантность тензорных соотношений. Тензор поляризации, тензор механических напряжений, тензор инерции. Главные оси и главные значения тензора. Тензорная поверхность. Инварианты тензоров второго ранга. Изотропные тензоры. Тензор Леви-Чивита. Векторное, двойное векторное и смешанное произведения в тензорной форме. | 22                                 | 5                                  | 6                                  | —                                  | 11                                 | 11                                 |
| <b>4. Тензорные поля.</b> Градиент, ротор и дивергенция. Понятия потенциального и вихревого полей. Дифференциальные операции 2-го порядка, оператор Лапласа. Интегральные теоремы векторного анализа. Векторные тождества.   | 21                                 | 4                                  | 5                                  | —                                  | 9                                  | 12                                 |
| <b>5. Криволинейные системы координат.</b> Криволинейные системы координат, сферические и цилиндрические координаты. Коэффициенты Ламе. Метрический тензор. Якобиан. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.   | 10                                 | 2                                  | 1                                  | —                                  | 3                                  | 7                                  |
| <b>Промежуточная аттестация</b>  | 1                                  |                                    |                                    |                                    | 1                                  |                                    |
| <u>Итого</u>   | Error! Reference source not found. | Error! Reference source not found. | Error! Reference source not found. | Error! Reference source not found. | Error! Reference source not found. | Error! Reference source not found. |

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках практических занятий

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме - зачет.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающегося проводится в форме выполнения домашних контрольных заданий и изучения лекционного материала. В качестве учебно-методического обеспечения самостоятельной работы используется литература, указанная в разделе 6. Примеры контрольных вопросов и заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | Шкала оценивания сформированности компетенций   |   |   |   |   |  |   |
|--|---|---|---|---|---|--|---|
|  | плохо   | неудовлетворительно   | удовлетворительно   | хорошо  | очень хорошо  | отлично  | превосходно   |
|  | Не зачтено  |   | зачтено   |   |   |  |   |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.                          | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок                               | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.   | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.  |
| <u>Умения</u>  | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа              | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u>  | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить   | При решении стандартных задач не продемонстрированы   | Имеется минимальный набор навыков для решения   | Продemonстрированы базовые навыки при решении   | Продemonстрированы базовые навыки при решении   | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных  | Продemonстрирован творческий подход к решению   |

|  |  |   |   |   |   |                                  |                      |
|--|--|---|---|---|---|----------------------------------|----------------------|
|  | наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | базовые навыки.<br><br>Имели место грубые ошибки. | стандартных задач с некоторыми недочетами | стандартных задач с некоторыми недочетами | стандартных задач без ошибок и недочетов. | ых задач без ошибок и недочетов. | нестандартных задач. |
|--|--|---|---|---|---|----------------------------------|----------------------|

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка     |                     | Уровень подготовки   |
|------------|---------------------|--|
| зачтено    | Превосходно         | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»   |
|            | Отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»                     |
|            | Очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»           |
|            | Хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»                       |
|            | Удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»  |
|            | Плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

| № | Вопросы | Код формируемой |
|---|---------|-----------------|
|---|---------|-----------------|

|    |  | компетенции |
|----|--|-------------|
| 1  | Линейная зависимость векторов  | ОПК-1       |
| 2  | Базис в векторном пространстве. Декартова система координат                            | ОПК-1       |
| 3  | Преобразование компонент вектора при повороте системы координат                        | ОПК-1       |
| 4  | Операции над тензорными величинами   | ОПК-1       |
| 5  | Теорема деления  | ОПК-1       |
| 6  | Симметрия тензоров. Симметричная и антисимметричная составляющие тензора второго ранга | ОПК-1       |
| 7  | Приведение симметричного тензора второго ранга к диагональному виду                    | ОПК-1       |
| 8  | Тензорная поверхность  | ОПК-1       |
| 9  | Изотропные тензоры   | ОПК-1       |
| 10 | Оператор «набла» (примеры использования)   | ОПК-1       |
| 11 | Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламэ  | ОПК-1       |
| 12 | Криволинейные координаты. Якобиан  | ОПК-1       |
| 13 | Тензор инерции твердого тела   | ОПК-1       |

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

- Дан вектор  $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$ , где  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  – взаимно перпендикулярные векторы, причем  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  и  $|\vec{c}| = 3$ . Найти углы между вектором  $\vec{p}$  и  
 а) векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ;                      б) векторами  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $-(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .
- При каком значении  $t$  векторы  $\vec{a} = \{3, 6, 9\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 5, 8\}$ ,  $\vec{c} = \{4, 7, t\}$  компланарны?
- Компоненты двух векторов заданы в различных системах координат следующим образом: при повороте системы координат  $K$  вокруг оси  $Oy$  на  $30^\circ$   $\vec{a}' = \{1, 1, \sqrt{3}\}$  и при повороте  $K$  вокруг оси  $Oz$  на  $45^\circ$   $\vec{b}'' = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$ . Найти скалярное произведение этих векторов.
- Доказать, что произведение  $\delta_{ij}A_jB_nC_n$  является вектором, если  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$  – векторы.
- В некоторой декартовой системе координат имеет место соотношение  $T_{nkm} = A_{mi}R_{ink}$ . Доказать, что  $A_{mi}$  – тензор II-го ранга, если  $T_{nkm}$  и  $R_{ink}$  – тензоры III-го ранга.
- В некоторой системе координат известны компоненты двух векторов –  $\vec{A} = \{1, 2, -1\}$  и  $\vec{B} = \{2, 3, -4\}$ . Найти матрицу тензора  $T_{ij} = A_iB_j - \varepsilon_{ijk}A_k$  и вычислить его след.
- Пусть вектор  $\vec{A}$  имеет компоненты  $\{1, 2, 3\}$ . Найти свертку  $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{klm}A_m$ .

8. В некоторой системе координат известны компоненты тензора II-го ранга:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Разложить его на симметричную } S_{ij} \text{ и } A_{ij} \text{ антисимметричную}$$

составляющие. Найти  $Sp(S_{ij}A_{ij})$ .

9. Найти градиент скалярной функции  $\varphi = \frac{\sin r}{r}$ ;

10. Найти дивергенцию и ротор векторного поля  $\vec{A} = [\vec{a} \times \vec{r}]$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Г.М. Максимова, А.И. Малышев, И.Л. Максимов, Сборник контрольных заданий по курсу векторного и тензорного анализа: учебное пособие, Н.Новгород, изд-во ННГУ, 2002, 33 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 100 экз.
2. В.М. Соколов, Н.Г. Голубева, Г.М. Максимова, Сборник задач по основам векторного и тензорного анализа, Горький, изд-во ГГУ, 1976, 44 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 15 экз.
3. В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности: учебное пособие, СПб., М., Краснодар, Лань, 2010, 480 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, абонемент физического факультета, 39 экз.

б) дополнительная литература:

1. А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов, Векторный анализ и начало тензорного исчисления, М., Высшая школа, 1966, 252 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 8 экз.
2. Н.Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., Наука, 1965, 426 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 9 экз.
3. Ю.А. Амензаде, Теория упругости, М., Высшая школа, 1976, 272 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 7 экз.
4. В.Г. Левич, Курс теоретической физики, М., Наука, 1969, 910 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 111 экз.
5. Б.М. Будаков, С.В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, М., Наука, 1965, 607 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 21 экз.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)

Интернет-ресурсы Фундаментальной библиотеки ННГУ <http://www.lib.unn.ru/>.

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные досками и мелом или магнитно-маркерными досками с наборами маркеров.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.



Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ с учетом рекомендаций и ОПОП ВПО по направлению подготовки 09.04.02 «Информационные системы и технологии».

Автор

Доцент каф. ТФ

физического факультета, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

Тележников А.В.

Рецензент

д.ф.-м.н., профессор, зав. каф.  
статистической радиофизики и  
мобильных систем связи РФФ

\_\_\_\_\_

Мальцев А.А.

Заведующий кафедрой ИТФИ

д.т.н., профессор

\_\_\_\_\_

Фидельман В.Р

Программа одобрена на заседании методической комиссии физического факультета