

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Метод конечных элементов

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

01.04.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Математическая робототехника

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.06 Метод конечных элементов относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-12: Способен разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач производственно-технологической деятельности	<p>ПК-12.1: Знает основные методы разработки математических методов, системного и прикладного программного обеспечения для решения задач производственно-технологической деятельности</p> <p>ПК-12.2: Умеет оценивать трудоемкость разработки программных средств для решения задач производственно-технологической деятельности</p> <p>ПК-12.3: Имеет навыки разработки системного программного обеспечения для решения задач производственно-технологической деятельности</p>	<p>ПК-12.1: Знать вариационные постановки статических и динамических задач механики деформируемого твердого тела и смежных дисциплин и алгоритмы их решения методом конечных элементов</p> <p>ПК-12.2: Уметь ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики; осуществлять анализ и выбор формулировок и методов решения статических и динамических задач механики деформируемого твердого тела и смежных дисциплин</p> <p>ПК-12.3: Владеть опытом решения задач механики деформируемого твердого тела и смежных дисциплин методом конечных элементов с использованием математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и моделей</p>	Задания	Зачёт: Контрольные вопросы Задания
ПК-4: Способен	ПК-4.1: Знает методы	ПК-4.1:	Задания	

разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач ПК-4.2: Умеет применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач ПК-4.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач	Знать методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач  ПК-4.2: Уметь применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач  ПК-4.3: Иметь навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач		Зачёт: Контрольные вопросы Задания
--	---	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	16
- КСР	1
<b>самостоятельная работа</b>	<b>23</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	

			(практические занятия/лабораторные работы), часы		
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Основы МКЭ. Постановка задачи теории упругости и теплопроводности. Вариационная постановка. МКЭ как вариант метода Рунге. Простейшие задачи.	9	4	2	6	3
Обобщенные вариационные формулировки	5	2		2	3
Простейшие аппроксимации в конечных элементах	9	4	2	6	3
Семейства конечных элементов различной мерности	9	4	2	6	3
Криволинейные элементы. Изопараметрическая технология	10	4	3	7	3
Точность, устойчивость, сходимость метода конечных элементов. Проблемы сдвигового и объемного записания	9	4	2	6	3
Вычислительные вопросы МКЭ	9	4	2	6	3
МКЭ для задач устойчивости и динамики конструкций	11	6	3	9	2
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	32	16	49	23

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Основы МКЭ. Постановка задачи теории упругости и теплопроводности. Вариационная постановка. МКЭ как вариант метода Рунге. Простейшие задачи.
2. Обобщенные вариационные формулировки
3. Простейшие аппроксимации в конечных элементах
4. Криволинейные элементы. Изопараметрическая технология
5. Точность, устойчивость, сходимость метода конечных элементов. Проблемы сдвигового и объемного записания
6. Вычислительные вопросы МКЭ
7. МКЭ для задач устойчивости и динамики конструкций

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное решение задач (3 задачи в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

Дополнительная литература:

1. Капустин С.А. Метод взвешенных невязок решения задач механики деформируемых тел и теплопроводности: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 60 с. (<http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/19.pdf>).

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-12:**

##### *Задание 1*

Решить задачу о растяжении прямолинейного стержня МКЭ и сравнить с аналитическим решением. Нарисовать графики перемещений и напряжений.

#### **5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4:**

##### *Задание 1*

Записать полную систему соотношений для применения МКЭ для одномерного случая (растяжение стержня)

##### *Задание 2*

Записать полную систему соотношений для применения МКЭ для случая плоской деформации

##### *Задание 3*

Записать полную систему соотношений для применения МКЭ для случая плоского напряжения

### **Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
--------	--------------------

<b>зачтено</b>	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-12

1. Построение координатных функций в обобщенных координатах.
2. Непрерывность перемещений вдоль границ КЭ. Понятие полных и неполных полиномов.
3. Специальные системы координат.
4. Лагранжевы КЭ.
5. Сирендиповы КЭ.
6. Треугольные КЭ. Локальная система координат для треугольных КЭ.
7. Изопараметрические КЭ.
8. Интегрирование в изопараметрических КЭ. Квадратурные формулы Гаусса.
9. Точность и сходимость в МКЭ. Факторы, влияющие на точность решения в МКЭ.
10. Анализ сходимости в МКЭ.
11. Устойчивость в МКЭ.
12. Условия полноты и непрерывности координатных функций в МКЭ. Понятие о несовместных КЭ.
13. Способы повышения точности и скорости сходимости МКЭ. Причины ухудшения обусловленности. Возможность увеличения точности без ухудшения обусловленности.
14. Понятие ширины ленты матрицы жесткости системы.

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Формулировки задач механики: диф. уравнения, вариационные формулировки, динамика, статика. Постановка задачи теории упругости: группы уравнений. Понятие функционала.
2. Принцип стационарности полной потенциальной энергии.
3. Виртуальные перемещения и принцип возможной работы.
4. Принцип стационарности дополнительной энергии.
5. Принцип дополнительной возможной работы.
6. Постановка задачи теории упругости в матричной форме.
7. Метод Ритца. Требования к координатным функциям.
8. Метод конечных элементов.
9. Требования к координатным функциям в МКЭ. Понятие функции формы.
10. Формулировка МКЭ на основе принципа стационарности потенциальной энергии.
11. Узловые перемещения и силы, матрица жесткости КЭ.
12. Механический смысл матрицы жесткости КЭ. Понятие степени свободы.
13. Построение матрицы жесткости конструкции. Матрица инцидентности. Её свойства.
14. Формирование матриц жесткости КЭ и конструкции. Формирование вектора узловых сил КЭ и конструкции.
15. Способы построения координатных функций в МКЭ. Дополнительные требования к координатным функциям в МКЭ.

#### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

#### **5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4**

##### *Задание 1.*

Определить, являются ли приведенные системы функций линейно независимыми

##### *Задание 2.*

Вычислить размерность матрицы жесткости для приведенных КЭ

##### *Задание 3.*

Построить матрицу инцидентности для приведенной сетки КЭ

##### *Задание 4.*

Определить, являются ли приведенные КЭ совместными

##### *Задание 5.*

Для приведенных лагранжевых КЭ записать функции формы в локальной и общей системе



#### Задание 6.

Для приведенных треугольных КЭ записать функции формы

### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-12

#### Задание 1.

Для предложенной задачи изложить пошаговое применение вычислительных комплексов на основе МКЭ

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три не существенные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Галлагер Ричард. Метод конечных элементов : основы / пер. с англ. В. М. Картвелишвили ; под ред. Н. В. Баничука. - М. : Мир, 1984. - 428 с. : ил. - 2.40., 3 экз.
2. Образцов Иван Филиппович. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов : учеб. пособие для студентов авиац. специальностей вузов. - М. : Высшая школа, 1985. - 391 с. - 1.10., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Деклу Ж. Метод конечных элементов / пер. с фр. Б. И. Квасова ; под ред. Н. Н. Яненко. - М. : Мир, 1976. - 95 с. - 0.28., 18 экз.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике : пер. с англ. / под ред. Б. Е. Победри. - М. : Мир, 1975. - 541 с. : ил. - 2.70., 2 экз.
3. Стренг Гилберт. Теория метода конечных элементов / пер. с англ. В. И. Агошкова [и др.] ; под ред. Г. И. Марчука. - М. : Мир, 1977. - 349 с. : ил. - 1.73., 5 экз.
4. Сегерлинд Ларри Дж. Применение метода конечных элементов / пер. с англ. А. А. Шестакова ; под ред. Б. Е. Победри. - М. : Мир, 1979. - 392 с. : ил. - 1.80., 2 экз.
5. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / пер. с англ. Г. В. Демидова, А. Л. Урванцева ; под ред. Г. И. Марчука. - М. : Мир, 1981. - 304 с. : ил. - 1.40., 4 экз.

6. Рикардс Роланд Брунович. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Риж. политехн. ин-т им. А. Я. Пельше. - Рига : Зинатне, 1988. - 284 с. : ил. - 1.20., 1 экз.
7. Голованов Александр Иванович. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / АН СССР, Казан. фил., Физ.-техн. ин-т. - Казань : [б. и.], 1989. - 269 с. : ил. - 1.10., 1 экз.
8. Васидзу Кюнтиро. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / пер. с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна ; под ред. Н. В. Баничука. - М. : Мир, 1987. - 542 с. : ил. - 50.00., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm>
2. ANSYS Help версии 15, 16, 17
3. <http://www.emt.ru>
4. <http://www.fea.ru/>
5. <http://www.cae.ru/>
6. <http://mysopromat.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?catselect=feaprogramms>

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.