

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Математические методы нелинейной динамики

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.30 Математические методы нелинейной динамики относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-2: Способен выполнять фундаментальные и прикладные естественнонаучные работы поискового и теоретического и характера	<p>ПК-2.1: Знает методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта в соответствующей области исследований</p> <p>ПК-2.2: Умеет решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач</p> <p>ПК-2.3: Владеет методами выполнения работ поискового и теоретического характера</p>	<p>ПК-2.1: Знать методы математически корректной постановки естественнонаучных задач, постановок классических задач методов нелинейной динамики</p> <p>ПК-2.2: Уметь использовать на практике для решения конкретных задач базовые знания в области математического программирования, вариационного исчисления и методов оптимизации, математические алгоритмы методов нелинейной динамики</p> <p>ПК-2.3: Владеть методами нахождения, анализа, реализации и использования на практике математических алгоритмов методов нелинейной динамики</p>	Аудиторная контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы
ПК-3: Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных	ПК-3.1: Знает классические математические модели задач естествознания, численные методы решения базовых математических задач, математические	ПК-3.1: Знать классические постановки задач математических методов нелинейной динамики	Аудиторная контрольная работа	Экзамен: Контрольные вопросы

науках	методы обработки информации ПК-3.2: Умеет самостоятельно и корректно решать задачи естественнонаучного содержания, корректно использовать математические методы в конкретной предметной области, применять численные методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности ПК-3.3: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований или производственной деятельности	ПК-3.2: Уметь самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач математических методов нелинейной динамики  ПК-3.3: Владеть навыками самостоятельного использования методов формализации практических и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей обработки результатов экспериментальных исследований или производственной деятельности математических методов нелинейной динамики		
--------	---	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>42</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b>
	<b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем),	Самостоятельная работа

		часы из них			обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	
	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О	О Ф О
Тема1. Введение. Динамические системы, основные понятия.	12	4	4	8	4
Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем.	12	4	4	8	4
Тема 3. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС.	4	2	2	4	0
Тема 4. Консервативные системы с одной степенью свободы.	18	6	6	12	6
Тема 5. Консервативные трехмерные автономные системы.	14	4	4	8	6
Тема 6. Многомерные системы Гамильтона.	10	2	2	4	6
Тема 7. Квазиконсервативные автономные системы.	20	6	6	12	8
Тема 8. Неавтономные периодические по времени системы.	16	4	4	8	8
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема1. Введение. Динамические системы, основные понятия. Примеры задач из физики, механики, биологии, экономики, приводящие к понятию «динамическая система». Динамические системы с непрерывным временем (системы дифференциальных уравнений) и с дискретным временем (отображения). Устойчивость тривиального решения. Второй метод Ляпунова. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. Общая классификация состояний равновесия многомерных систем.

Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем. Топологические структуры. Особые траектории и ячейки динамических систем. Основные понятия (фазовое пространство, фазовая кривая, состояние равновесия, векторное поле, особые точки). Классификация простых состояний равновесия. Сложные состояния равновесия. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых. Индексы состояний равновесия (особых точек векторного поля). Поведение траекторий на бесконечности. Особые траектории и ячейки динамических систем. Понятие грубости динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости. Примеры анализа двумерных динамических систем.

Тема 3. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС. Понятие грубости (структурной устойчивости). Необходимые и достаточные условия грубости.

Тема 4. Консервативные системы с одной степенью свободы. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет). Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции. Построение периодических решений уравнения Дюффинга и уравнения математического маятника. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях уравнения КДВ. Приложение к задаче Кеплера о движении частицы в поле тяготения. Обобщение на произвольные двумерные системы Гамильтона. Задача Вольтерра.

Тема 5. Консервативные трехмерные автономные системы. Уравнения Эйлера движения асимметричного волчка. Построение решений. Уравнения гидродинамического типа. Метод Галеркина. Триплет Обухова. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемые случаи.

Тема 6. Многомерные системы Гамильтона. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона. Теорема Пуассона. Теоремы Лиувилля и Арнольда. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: уравнение Дюффинга. Условно-периодические движения. Пространственное и временное средние. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Теория КАМ.

Тема 7. Квазиконсервативные автономные системы. Метод усреднения. Теоремы Боголюбова. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова (на примере уравнения Ван дер Поля). Применение метода усреднения для анализа предельных циклов в квазилинейных системах. Метод малого параметра Пуанкаре. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Метод усреднения для квазигамильтоновых существенно нелинейных двумерных автономных систем. Существование предельных циклов. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и её обобщение. Разрывные колебания. Метод точечных отображений. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса.

Тема 8. Неавтономные периодические по времени системы. Вынужденные колебания в линейных системах. Применение метода усреднения в резонансном случае для анализа периодических возмущений линейного осциллятора. Синхронизация колебаний при периодическом возмущении системы с предельным циклом. Параметрические системы. Основы теории Флоке. Резонансы в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Усреднение в резонансном случае. Возможные типы резонансных зон в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Анализ резонансных зон на примере периодического возмущения уравнения Дюффинга-Ван дер Поля.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс "Математические методы нелинейной динамики (МАТЕМАТИКА 4 к.)" (<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=6848>).

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-2:**

1. Для предлагаемого набора двумерных динамических систем решить вопрос об устойчивости состояния равновесия. Примеры систем см., например, в пособии «Динамические системы». Часть 1. Учебно-методический комплекс. Сост. А.Д. Морозов.-Н.Новгород: ННГУ, 2002, 32 с.

2. Построить фазовые портреты для конкретных двумерных динамических систем. Качественное исследование трехмерной системы Лоренца.
3. Построение решений уравнений Дюффинга, маятникового типа, уравнений с квадратичной нелинейностью.
4. Построение решений для интегрируемой системы, описывающей одномерный квантовый генератор.

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-3:

1. Исследование уравнения Ван дер Поля методом усреднения.
2. Доказательство теоремы о максимальном числе предельных циклов при алгебраическом возмущении линейного осциллятора.
3. Качественное исследование автономных возмущенных уравнений Дюффинга и маятника.
4. Качественное исследование периодических по времени возмущений уравнений Дюффинга и маятника.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Аудиторная контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Решены обе задачи без замечаний.
отлично	Решены обе задачи с незначительными пометками.
очень хорошо	Решены обе задачи с замечаниями.
хорошо	Решена одна задача без замечаний. Другая задача решена не полностью.
удовлетворительно	Решена одна задача без замечаний. Другая задача не решена.
неудовлетворительно	Не решены обе задачи.
плохо	Работа не представлена преподавателю.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний	Уровень знаний ниже	Минимально	Уровень знаний в	Уровень знаний в	Уровень знаний в	Уровень знаний в

	теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	минимальных требований. Имели место грубые ошибки	допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-2

1. Устойчивость состояния равновесия. Второй метод Ляпунова.
2. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению.
3. Критерий Гурвица.
4. Типы простых состояний равновесия в многомерных системах.
5. Классификация простых состояний равновесия.
6. Направление стремления фазовых кривых к простому состоянию равновесия.
7. Сложные состояния равновесия. Пример.
8. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых.
9. Индексы особых точек.
10. Поведение траекторий на бесконечности.
11. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет).
12. Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова.
13. Построение решений уравнений с одной степенью свободы: уравнение Дюффинга. Эллиптические интегралы и функции.
14. Построение решений уравнений с одной степенью свободы: уравнение математического маятника. Эллиптические интегралы и функции.
15. Задача о стационарных волновых решениях уравнения КДВ.
16. Задача Кеплера о движении частицы в поле тяготения.
17. Трехмерные системы. Уравнения движения асимметричного волчка и их решение.
18. Уравнения гидродинамического типа.
19. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемый случай. Построение решений (сведение к квадратурам).
20. Метод усреднения. Первая теорема Боголюбова. Пример.
21. Метод Пуанкаре. Периодические решения в уравнении Ван дер Поля.
22. Анализ уравнения Ван дер Поля методом усреднения.
23. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.
24. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник).
2. Динамические системы: основные понятия, классификация, пример.
3. Особые траектории и ячейки динамических систем.
4. Примеры анализа динамических систем (в билете будет один из примеров, рассмотренных в лекциях).
5. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС.



6. Необходимые и достаточные условия грубости двумерных ДС. Теорема Андронова-Понтрягина.
7. Многомерные гамильтоновы системы. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона.
8. Теоремы Пуассона, Лиувилля и Арнольда.
9. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: уравнение Дюффинга.
10. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние.
11. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Основы теории КАМ.
12. Метод усреднения для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым.
13. Существование предельных циклов в двумерных автономных системах, близких к нелинейным гамильтоновым. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение.
14. Метод точечных преобразований. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример.
15. Разрывные колебания.
16. Вынужденные колебания в линейных системах.
17. Вынужденные колебания в нелинейном случае на примере. Роль нелинейности.
18. Синхронизация колебаний на примере периодического возмущения уравнения Ван дер Поля.
19. Параметрические системы.
20. Резонансы в существенно нелинейных системах. Усреднение в резонансном случае.
21. Возможные типы резонансных зон.
22. Структура резонансных зон для уравнения периодического возмущения уравнения Дюффинга.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно».
отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо».
хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо».
удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно».
неудовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».

Оценка	Критерии оценивания
плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо».

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Морозов Альберт Дмитриевич. Математические методы теории колебаний. - М. ; Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютер. исслед., 2017. - 144 с. - ISBN 978-5-4344-0439-6 : 160.00., 11 экз.
2. Морозов Альберт Дмитриевич. Введение в математические методы нелинейной динамики : учебно-методическое пособие / А. Д. Морозов ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 98 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851225&idb=0>.
3. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1967. - 487 с. : черт. - 2.58., 53 экз.
4. Горяченко Вадим Демьянович. Элементы теории колебаний : учеб. пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 2001. - 395 с. - ISBN 5-06-004166-2 : 80.85., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Арнольд Владимир Игоревич. Математические методы классической механики : [учеб. пособие для ун-тов]. - М. : Наука, 1974. - 431 с. : черт. - 1.10., 3 экз.
2. Неймарк Юрий Исаакович. Динамические системы и управляемые процессы. - М. : Наука, 1978. - 336 с. : ил. - 1.50., 40 экз.
3. Морозов Альберт Дмитриевич. Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний : монография / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. - 292 с. - б/п., 4 экз.
4. Морозов А. Д. Построение периодических решений основных нелинейных уравнений / Морозов А. Д., Морозов К. Е. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2021. - 17 с. - Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика». - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=830137&idb=0>.
5. Морозов Кирилл Евгеньевич. О предельных циклах в двумерных динамических системах : учебно-методическое пособие / К. Е. Морозов ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2023. - 15 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=877071&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Программа WInSet (Драгунов Т.Н., Морозов А.Д. Использование программы WInSet для визуализации динамических систем: Учебное пособие.-Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.-102 с., <http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2007/41.pdf>).

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Морозов Альберт Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.