

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Топология многообразий

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.03.01 Топология многообразий относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-6: Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	ПК-6.1: Знает специфику научных обзоров ПК-6.2: Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию ПК-6.3: Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований	ПК-6.1: Знает терминологию и основные результаты топологии многообразий.  ПК-6.2: Умеет применять основные понятия топологии многообразий для решения типовых задач  ПК-6.3: Владеет методами топологии многообразий.	Контрольная работа	Зачёт: Тест

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	0
- КСР	1
самостоятельная работа	39
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1	31	14		14	17
Тема 2	13	6		6	7
Тема 3	27	12		12	15
Аттестация	0				
КСР	1				1
Итого	72	32	0	33	39

#### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Фундаментальная группа и накрытия

Тема 2. Двумерные многообразия

Тема 3. Дифференциальные формы на многообразиях

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Топология многообразий, <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=3404>.

Иные учебно-методические материалы:

Теоретический материал лекционных занятий и литературные источники (список обязательной и дополнительной литературы приводится).

Для подготовки к зачёту рекомендуется использовать собственные конспекты лекций, а также источники, рекомендованные в списке литературы.

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-6:

1. Почему гладкое многообразие  $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x^2\}$  ориентируемо?

Ответ: потому, что его вертикальная проекция является картой, образующей атлас.

2. Доказать, что  $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x\}$  – гладкое многообразие размерности 1.

Доказательство: его вертикальная проекция является картой, образующей атлас.

3. Показать, что поверхность  $M = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0\}$  является двумерным гладким многообразием. Будет ли оно гладким подмногообразием пространства  $R^3$ ?

Доказательство: его вертикальная проекция является картой, образующей атлас.

Нет, не будет.

4. Найдите фундаментальную группу поверхности  $M = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0\}$ .

1. Ответ: фундаментальная группа = 0.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задача решена полностью.
не зачтено	Задача не решалась или решена не полностью.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	отказа обучающегося от ответа		ошибок	несколько негрубых ошибок	несколько несущественных ошибок	нет.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ПК-6

##### Вопросы для подготовки к зачётному тесту по дисциплине

###### «Топология многообразий»

1. Гомотопия. Гомотопность отображений. Гомотопический класс. Пример: линейная гомотопия отображений в  $R^n$ . Свободная и связанная гомотопии. Гомотопия путей.
2. Определение фундаментальной группы (с проверкой аксиом группы).
3. Поведение фундаментальной группы при переносе начала: изоморфизм переноса.
4. Изоморфизм переноса и критерий коммутативности фундаментальной группы.
5. Определение и примеры односвязных пространств. Односвязность сферы размерности большей 1.
6. Критерии односвязности.
7. Определение накрытия. Дискретность слоя. Универсальное накрытие. Примеры накрытий. Мощности слоёв. Число листов накрытия.
8. Теорема о накрывающей гомотопии.
9. Фундаментальная группа окружности.
10. Фундаментальная группа проективного пространства.
11. Фундаментальная группа произведения топологических пространств. Примеры.
12. Индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп, его свойства. Гомоморфизм, индуцированный накрытием.
13. Определение и свойства гомотопической эквивалентности. Примеры.
14. Ретракция и ретракт. Примеры.
15. Определение и свойства деформационной ретракции. Примеры.
16. Теорема Борсука.
17. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
18. Фундаментальные группы основных поверхностей.
19. Коммутирование группы. Определение одномерной группы гомологий. Одномерные группы гомологий основных поверхностей. Попарная негомеоморфность основных поверхностей (следствие гомотопической неэквивалентности).
20. Внешняя алгебра. Правило перестановки.
21. Дифференциальные формы в точке многообразия. Значение формы на наборе векторов.
22. Дифференциальные формы на многообразии и операции над ними.
23. Прообраз дифференциальной формы.
24. Внешний дифференциал.
25. Интеграл от формы по многообразию, свойства интеграла.
26. Формула Стокса (доказательство в случае полупространства).
27. Частные случаи формулы Стокса: формула Ньютона-Лейбница, формула Грина.
28. Классическая формула Стокса.
29. Частный случай формулы Стокса: формула Гаусса-Остроградского.

##### Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Получено не менее 7 баллов из 10.
не зачтено	Получено менее 7 баллов из 10.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Масси У. Алгебраическая топология : введение / пер. с англ. М. С. Кушельмана ; под ред. А. В. Чернавского. - М. : Мир, 1977. - 343 с. : ил. - 1.66., 3 экз.
2. Зорич Владимир Анатольевич. Математический анализ : учеб. для студентов мат. и физ.-мат. фак. и специальностей вузов. - Изд. 5-е. - М. : Изд-во МЦНМО, 2007-. Математический анализ . Ч. 2. - М., 2007. - Изд. 5-е. - XIV, 794 с., 41 ил. - ISBN 5-94057-057-7 (ч. 2) : 397.00., 2 экз.

Дополнительная литература:

1. Дубровин Борис Анатольевич. Современная геометрия : методы и прил. : [учеб. пособие для физ.-мат. специальностей ун-тов]. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1986. - 759 с. : ил. - 1.90., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=3404>

Коснёвски, Ч. - Начальный курс алгебраической топологии. - 304с.

[https://vk.com/wall11633021\\_1081?ysclid=ltonuznclu76393997](https://vk.com/wall11633021_1081?ysclid=ltonuznclu76393997)

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Звонилов Виктор Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.