

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Группы и алгебры Ли

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Математика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.04.01 Группы и алгебры Ли относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-6: Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	ПК-6.1: Знает специфику научных обзоров ПК-6.2: Умеет составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию ПК-6.3: Владеет способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований	ПК-6.1: Знание основных понятий тематики, связанной с алгебрами Ли, и на базе этого может подготовить научный обзор.  ПК-6.2: Умение проводить исследования алгебр Ли, сочетая аналитические методы с численными результатами, полученными на компьютере и составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию.  ПК-6.3: Владение математическим аппаратом алгебр Ли и способен составить научный обзор, реферат и отчет по тематике проводимых исследований.	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
--	-------

<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>0</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Тема 1. Гладкие многообразия	15	6	0	6	9
Тема 2. Группы Ли	20	10	0	10	10
Тема 3. Алгебры Ли	20	10	0	10	10
Тема 4. Соответствие Ли	16	6	0	6	10
Аттестация	0				
КСР	1				1
Итого	72	32	0	33	39

#### Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Гладкие многообразия  
Тема 2. Группы Ли  
Тема 3. Алгебры Ли  
Тема 4. Соответствие Ли

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:  
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Группы и алгебры Ли 4 курс (математика), <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4499>.

Иные учебно-методические материалы:

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>
4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

## **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

#### **5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-6:**

1. Показать, что пространство ассоциативной алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно произведения  $[a, b] = ab - ba$ .
2. Пусть  $A$  – алгебра над полем  $K$ . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно коммутатора  $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ .
3. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов.
4. Найти все дифференцирования алгебры многочленов, алгебры многочленов Лорана. Доказать, что над полем нулевой характеристики эти алгебры простые.
5. Пусть  $K$  – поле характеристики  $p > 0$ . Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов  $K[x]/(x^p)$ .
6. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в  $\mathbb{R}^n$ .
7. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n=2m$ , является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
8. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.

9. Доказать, что алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  – простая алгебра Ли.
10. Найти алгебру Ли группы  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ .
11. Найти алгебру Ли группы  $SO(3)$ . Найти размерность группы  $O(n, \mathbb{R})$ .
12. Найти алгебру Ли группы  $SU(2)$ .
13. Доказательство сходимости ряда  $e^A$ . Экспоненциальное отображение на группе  $GL(n, \mathbb{R})$ .
14. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе  $O(3)$ .
15. Найти неприводимые представления алгебры Ли  $\mathfrak{sl}(2)$ .
16. Справедлива или нет теорема Ли для разрешимых алгебр Ли над произвольным полем? Привести примеры.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Решены все задачи. Допущено минимальное количество ошибок.
не зачтено	Не решено большинство задач.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений.	При решении стандартных задач не	Продemonстрированы основные	Продemonстрированы все	Продemonстрированы все	Продemonстрированы все	Продemonстрированы все основные

	Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-6

1. Найти все алгебры Ли размерности 2 над полем.
2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли  $sl(2)$ .
3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над  $\mathbb{R}$  является простой бесконечномерной алгеброй Ли.
4. Гладкие многообразия. Подмногообразия. Гладкие отображения.
5. Определение и примеры групп Ли.
6. Алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии.  $\Phi$ -связанные векторные поля.
7. Левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Алгебра Ли группы Ли.
8. Алгебра Ли групп  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .
9. Алгебра Ли группы  $GL(n, \mathbb{R})$ .
10. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты.
11. Теорема Картана о замкнутых подгруппах групп Ли.
12. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизаторы.
13. Однородные пространства. Факторгруппа по замкнутой подгруппе.
14. Алгебра Ли подгруппы Ли, нормальной подгруппы.
15. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.
16. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли.
17. Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.
18. Теорема Адо-Ивасава.
19. Интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса.
20. Соответствие Ли.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно».

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно» или «плохо».

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Ч. 1 / пер. с англ. Д. А. Райкова. - М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. - 316 с. - 18.15., 2 экз.
2. Понтрягин Лев Семенович. Непрерывные группы. - 4-е изд. - М. : Наука, 1984. - 520 с. - 3.10., 4 экз.

Дополнительная литература:

1. Серр Жан-Пьер. Алгебры Ли и группы Ли / пер. с англ. и фр. А. Б. Волинского ; под ред. А. Л. Онищика. - М. : Мир, 1969. - 375 с. : с черт. - (Библиотека сборника "Математика"). - 1.06., 2 экз.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли : подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли / пер. с фр. А. Н. Рудакова ; под ред. А. И. Кострикина. - М. : Мир, 1978. - 342 с. - (Элементы математики). - 2.20., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Электронная библиотека «Мир уравнений» (Eqworld)  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.01 - Математика.

Автор(ы): Кузнецов Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.