

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Комбинаторный анализ

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.09.02 Комбинаторный анализ относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1: Знать основные понятия и утверждения дисциплины «Комбинаторный анализ», описание основных комбинаторных объектов; иметь представление о стандартных (правила равенства, суммы и произведения) и более сложных методах комбинаторики (производящие функции, метод решета, теория Поля)</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Уметь пользоваться базовыми методами комбинаторики (правила суммы и произведения, метод включения и исключения, раскрытие линейных рекуррентных соотношений). Владеть навыками решения прикладных комбинаторных задач, включая задачи из алгебры (теория групп, многочлены, комплексные</p>	Тест Контрольная работа	Зачёт: Задачи

		<p>числа) и математического анализа (разложение функций в степенные ряды, гиперболические функции)</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Классические комбинаторные объекты	4	1	1	2	2
Тема 2. "Новые" комбинаторные объекты	4	1	1	2	2
Тема 3. Задачи о разбиении чисел	4	1	1	2	2

Тема 4. Задачи о разбиении множеств	4	1	1	2	2
Тема 5. Функциональное представление комбинаторных объектов	4	1	1	2	2
Тема 6. Производящие функции	20	4	4	8	12
Тема 7. Экспоненциальные производящие функции	14	3	3	6	8
Тема 8. Решение линейных рекуррентных уравнений	9	2	2	4	5
Тема 9. Метод решета	8	2	2	4	4
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	16	16	33	39

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Классические комбинаторные объекты. Перестановки (подстановки), подмножества. Биномиальная формула, сумма биномиальных коэффициентов, симметрия и унимодальность. Рекуррентные соотношения для биномиальных коэффициентов.
2. Новые комбинаторные объекты. Перестановки заданного мультимножества.
3. Разбиение чисел. Упорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.
4. Разбиение чисел. Упорядоченные разбиения на любое число слагаемых.
5. Разбиение чисел. Неупорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.
6. Разбиение чисел. Неупорядоченные разбиения на любое число слагаемых.
7. Разбиение множеств. Неупорядоченные разбиения на заданное число блоков.
8. Разбиение множеств. Неупорядоченные разбиения на любое число блоков.
9. Разбиение множеств. Упорядоченные разбиения.
10. Разбиения подстановок на циклы.
11. Функциональное представление комбинаторных объектов. Типы функций и различимость элементов. Таблица комбинаторных объектов.
12. Производящие функции. Общая теория линейных однородных рекуррентных соотношений.
13. Производящие функции. Системы линейных однородных рекуррентных соотношений.
14. Производящие функции. Неоднородные рекуррентные соотношения.
15. Производящие функции. Примеры линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами.
16. Производящие функции. Пример решения нелинейного рекуррентного соотношения (числа Каталана).

17. Производящие функции. Подсчет числа специализированных мультимножеств.
18. Производящая функция для разбиений чисел.
19. Экспоненциальные производящие функции. Их использование для нахождения перестановок специализированных мультимножеств.
20. Производящие функции чисел Стирлинга 2-го рода и чисел Белла.
21. Производящие функции чисел Стирлинга 1-го рода.
22. Метод решета. Подсчет числа беспорядков.
23. Метод решета. Подсчет числа булевых функций без фиктивных переменных.
24. Метод решета. Подсчет количества простых чисел из заданного диапазона.
25. Метод решета. Нахождение функции Эйлера (количества чисел, не превосходящих заданного числа и взаимно простых с ним).
26. Метод решета. Его применение к вычислению перманентов.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Шульц Михаил Михайлович. Комбинаторика : спецкурс : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2009. - 167 с. - ISBN 978-5-91326-130-4 : 168.75.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=455898&idb=0>

2. Библиотека Eqworld  
<http://eqworld.ipmnet.ru/>

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ПК-13:**

1. Что из перечисленного ниже является синонимом слова СОЧЕТАНИЕ ?

1) подмножество    2) кортеж    3) разбиение    4) независимый цикл

2. Чему равно число размещений из 6 по 3?

1) 10    2) 20    3) 60    4) 120

3. Чему равно число сочетаний с повторениями из 3 по 5?

1) 0    2) 1    3) 10    4) 21

4. Граф имеет  $n$  вершин и  $m$  ребер. Сколько у него различных остовных подграфов?

1)  $2n$     2)  $2m$     3)  $m + n$     4)  $mn$

5. Какие корни имеет характеристическое уравнение линейного рекуррентного соотношения  $an+2 = 5an+1 - 4an$ ?

1) 1 кратности 2    2) 1 и 4    3) 1 и  $-4$     4)  $-1$  и 4

6. Сколько существует нечетных простых чисел, не превосходящих 20?

1) 5    2) 7    3) 8    4) 10

7. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 30 и взаимно простых с 30?

1) 5    2) 7    3) 8    4) 10

8. Сколько делителей существует у числа 64?

1) 5    2) 6    3) 7    4) 8

9. Сколько существует беспорядков из трех элементов?

1) 1    2) 2    3) 3    4) 4

### Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Верно решено не менее 60% тестовых заданий
не зачтено	Решено неправильно или не решено более 40% тестовых заданий

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

1. Сколько существует решений уравнения  $x_1 + \dots + x_n = k$  при заданных  $n$  и  $k$ , если все  $x_i$  равны 0 или 1? (Конкретный пример:  $n = 10$ ,  $k = 5$ ).
2. Сколько существует решений уравнения  $x_1 + \dots + x_n = k$  при заданных  $n$  и  $k$ , если все  $x_i$  – целые неотрицательные числа? (Конкретный пример:  $n = 6$ ,  $k = 5$ ).
3. Сколько существует решений уравнения  $x_1 + \dots + x_n = k$  при заданных  $n$  и  $k$ , если все  $x_i$  – натуральные числа? (Конкретный пример:  $n = 5$ ,  $k = 10$ ).
4. Сколько существует матриц из  $m$  строк,  $n$  столбцов с элементами из множества  $\{0, 1\}$ , у которых все строки различны?
5. Сколько существует упорядоченных разбиений натурального числа  $n$  на  $k$  натуральных слагаемых? Каково число аналогичных неупорядоченных разбиений? (Конкретный пример:  $n = 8$ ,  $k = 4$ ).
6. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности  $n$  на  $k$  непустых блоков? (Конкретный пример:  $n = 7$ ,  $k = 5$ ).
7. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности  $n$  на любое число непустых блоков? (Конкретный пример:  $n = 6$ ).

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Верно решено не менее 95% задач
отлично	Верно решено не менее 85%, но не более 95% задач
очень хорошо	Верно решено не менее 80%, но не более 85% задач
хорошо	Верно решено не менее 70%, но не более 80% задач
удовлетворительно	Верно решено не менее 55%, но не более 70% задач
неудовлетворительно	Верно решено не менее 35%, но не более 55% задач
плохо	Верно решено не более 35% задач

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации



Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Постройте производящую функцию для мультимножеств в универсе  $\{0, 1, 2\}$ , в которых элемент  $i$  входит любое число раз  $k$ , сравнимое с  $i$  по модулю 3. Найдите количество таких мультимножеств мощности 0, 3 и 9, выпишите все соответствующие мультимножества.

2. Какая числовая последовательность порождается производящей функцией  $f(z) = -\ln(1 - z)$  ?

3. Раскройте линейную рекуррентность  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ , если  $a_0 = 10, a_1 = 16$ .

4. Сколько существует евклидово неизоморфных деревьев с  $m$  ребрами? (Конкретные примеры:  $m = 3, m = 5$ ).

5. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы слова ТАРАКАН ?

6. В группе переводчиков из 13 человек каждый знает хотя бы один из трех языков – английский, немецкий, французский. При этом

английский язык знают 10 переводчиков,  
 немецкий язык знают 7 переводчиков,  
 французский язык знают 6 переводчиков,  
 английский и немецкий знают 5 переводчиков,  
 английский и французский знают 4 переводчика,  
 немецкий и французский знают 3 переводчика.

Сколько переводчиков знают все три языка ?

Сколько переводчиков знают в точности два языка?

В точности один язык?

7. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих  $n$  и взаимно простых с  $n$ ?  
 (Конкретный пример:  $n = 100$ ).

8. Сколько делителей существует у натурального числа  $n$ ? (Конкретный пример:  $n = 100$ ).

9. Какие перестановки называются беспорядками? Сколько существует беспорядков из  $n$  элементов? (Конкретный пример:  $n = 6$ ).

10. Вычислите перманент матрицы четвертого порядка, у которой все элементы главной и побочной диагоналей равны 0, а все остальные элементы равны 1.

11. Подсчитайте количество булевых функций от четырех переменных, у которых все переменные являются существенными.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Верно решено не менее 60% тестовых заданий
не зачтено	Решено неправильно или не решено более 40% тестовых заданий

#### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Шульц Михаил Михайлович. Комбинаторика : спецкурс : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2009. - 167 с.

- ISBN 978-5-91326-130-4 : 168.75., 72 экз.

2. Яблонский Сергей Всеволодович. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". - Изд. 5-е, стер. - М. : Высшая школа, 2008. - 384 с. : ил. - ISBN 978-5-06-005943-4 : 574.00., 2 экз.

3. Риордан Джон. Введение в комбинаторный анализ / Д. Риордан. - М. : Изд-во иностр. лит., 1963. - 287 с. : ил., схемы. - 1.27., 5 экз.

4. Холл Маршалл. Комбинаторика / пер. с англ. С. А. Широковой ; под ред. А. О. Гельфонда, В. Е. Тараканова. - М. : Мир, 1970. - 424 с. : ил., черт. - 1.59., 10 экз.

Дополнительная литература:

1. Виленкин Наум Яковлевич. Популярная комбинаторика / АН СССР. - М. : Наука, 1975. - 208 с. - (Научно-популярная серия). - 0.35., 2 экз.

2. Виленкин Наум Яковлевич. Комбинаторика. - М. : Наука, 1969. - 328 с. : ил. - 32.00., 3 экз.

3. Холл Маршалл. Комбинаторный анализ / пер. с англ. К. А. Рыбникова. - М. : Изд-во иностр. лит., 1963. - 97 с. : ил., схемы. - (Библиотека сборника "Математика"). - 0.32., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Шульц Михаил Михайлович. Комбинаторика : спецкурс : учеб. пособие / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2009. - 167 с. - ISBN 978-5-91326-130-4 : 168.75.

<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=455898&idb=0>

2. Библиотека Eqworld

<http://eqworld.ipmnet.ru/>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Сорочан Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.