РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
дисциплины
«Индивидуальные занятия с экспертами ЕГЭ по математике»

1.АННОТАЦИЯ

Программа отвечает потребностям обучающихся старших классов средних общеобразовательных организаций в подготовке к единому государственному экзамену (ЕГЭ), способствует углубленному изучению вызывающих затруднения отдельных разделов дисциплины «Математика» по выбору учащегося, систематизации, углублению, обобщению и закреплению знаний и умений под руководством опытных педагогов.

В рабочей программе представлены содержание математического образования, требования к обязательному и возможному уровню подготовки обучающегося и выпускника, виды контроля.

Задачи (в зависимости от выбранных для углубленного изучения разделов и тем):

- систематизация сведений о числах; изучение новых видов числовых выражений и формул; совершенствование практических навыков и вычислительной культуры, расширение и совершенствование алгебраического аппарата, сформированного в основной школе, и его применение к решению математических и нематематических задач;
- расширение и систематизация общих сведений о функциях, пополнение класса изучаемых функций, иллюстрация широты применения функций для описания и изучения реальных зависимостей;
- развитие представлений о вероятностно-статистических закономерностях в окружающем мире, совершенствование интеллектуальных и речевых умений путем обогащения математического языка, развития логического мышления;
- изучение свойств пространственных тел, формирование умения применять полученные знания для решения практических задач;
- знакомство с основными идеями и методами математического анализа.

Цели (в зависимости от выбранных для углубленного изучения разделов и тем):

- Обеспечить повышение уровня общеобразовательной подготовки учащихся по матема тике сформировать навыки и умения, необходимые для успешной сдачи единого государственного экзамена по математике.
- **формирование представлений** о математике, как универсальном языка науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;
- **овладение математическими знаниями и умениями**, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- **воспитание** средствами математики культуры личности: отношения к математике как части общечеловеческой культуры: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

2. СОДЕРЖАНИЕ

Программа предусматривает обучение по любой из нижеперечисленных тем или их комбинации в объеме 12 академических часов (по выбору обучающегося).

Учебно-тематический план программы

№п/п	Название модуля, раздела, темы	Количество часов			Формы аттестации / контроля
		Всего	Теория		
1.	**Раздел 1**. Степени и корни. Степенные функции. Показательная и логарифмическая функции	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
1.1	Тема 1. Степени и корни. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики.				
1.2	Тема 2. Показательные уравнения и неравенства. Понятие логарифма. Свойства логарифмов.				
2	**Раздел 2.** Предел, производная, первообразная и интеграл.	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
2.1	Тема 1. Определение и свойства предела последовательности и функции.				
2.2	Тема 2. Свойства пределов. Определение производной. Свойства производной				
2.3	Тема 3. Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Неопределенный интеграл. Первообразная.				
2.4	Тема 4. Задачи ЕГЭ на производные.				
2.5	Тема 5. Задачи на экстремумы.				
3	**Раздел 3**. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств.	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
3.1	Тема 1. Тригонометрические уравнения.				
3.2	Тема 2. Показательные уравнения.				
3.3	Тема 3. Тригонометрические неравенства.				
3.4	Тема 4. Показательные неравенства.				
3.5	Тема 5. Алгебраические уравнения и неравенства.				

4	**<u>Раздел 4.</u>** Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей.	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
4.1	Тема 1. Сочетания, Размещения, Перестановки.				
4.2	Тема 2. Комбинаторные задачи.				
4.3	Тема 3. Основания теории вероятностей.				
4.4	Тема 4. Задачи на эксперименты с конечным числом исходов.				
4.5	Тема 5. Теорема о сумме вероятностей.				
4.6	Тема 6. Теорема о произведении вероятностей.				
4.7	Тема 7. Условные вероятности. Задачи.				
4.8	Тема 8. Экономические задачи.				
4.9	Тема 9. Планиметрия,,задачи на треугольники.				
4.10	Тема 10. Планиметрия.Трапеции,окружности.				
4.11	Тема 11. Стереометрия. Пирамиды,шары,конусы				
5	**<u>Раздел 5.</u>** Задачи с параметрами	12	0	12	Педагогическое наблюдение- Опрос.
5.1	Тема 1.Уравнения с параметром (тригонометрия).				
5.2	Тема 2. Уравнения с параметром (алгебра).				
5.3	Тема 3. Параметрические неравенства.				
5.4	Тема 4. Задачи ЕГЭ 17,18.				

3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

Проведение итоговой аттестации по дополнительной общеразвивающей программе не предусмотрено.

Оценка образовательных результатов обучающегося по дополнительной общеразвивающей программе носит вариативный характер. Инструменты оценки достижений обучающегося способствуют росту его самооценки и познавательных интересов, а также диагностируют мотивацию достижений личности.

Время, цель и формы проведения контроля, аттестации по дополнительной общеразвивающей программе представлены в таблице 1.

Таблица 1

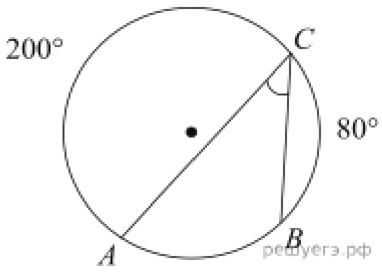
Время, цель и формы проведения контроля, аттестации

Время проведения	**Цель проведения**	**Форма контроля, аттестации**
Начальный или входной контроль		
В начале учебной программы	Определение уровня развития обучающегося, его способностей	Педагогическое наблюдение. Опрос.
Текущий контроль		
В течение всей учебной программы	Определение степени усвоения обучающегося учебного материала. Определение готовности обучающегося к восприятию нового материала. Повышение ответственности и заинтересованности обучающегося в обучении. Подбор наиболее эффективных методов и средств обучения	Педагогическое наблюдение. Опрос.
В конце учебной программы	Определение изменения уровня развития обучающегося его творческих способностей. Определение результатов обучения. Ориентирование обучающегося на дальнейшее обучение. Получение сведений для совершенствования общеобразовательной программы и методов обучения.	Педагогическое наблюдение. Опрос.

3.1. Примеры типовых заданий и иных материалов, используемых для оценки результатов обучения, в зависимости от выбранных тем.

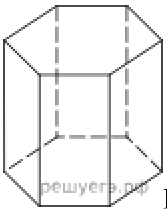
Типовые вопросы, задания в рамках текущего контроля

1.



Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 200°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

2.



Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

3.

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений − по одному от каждой страны. В первый день 36 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Каковы вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

4.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

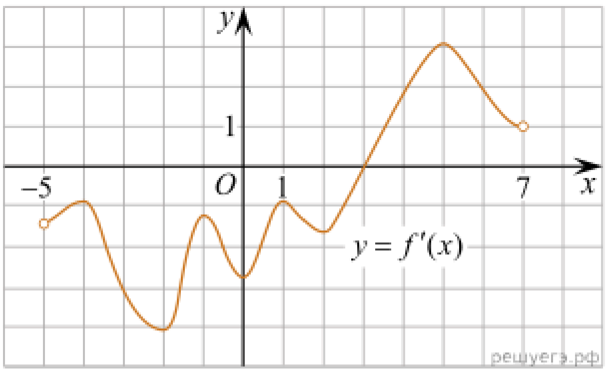
5.

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47)=3.$

6.

Найдите значение выражения $\dfrac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}.$

7.



На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;\ 4]$.

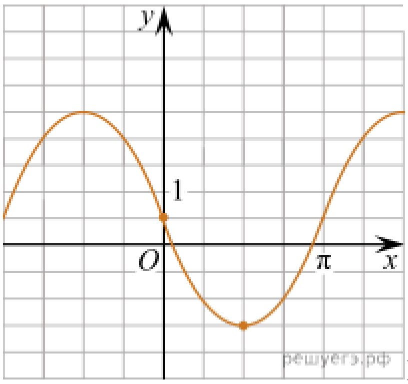
8

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C=5\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R=4\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=1{,}4$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 28 с. Ответ дайте в киловольтах.

9.

Расстояние между городами *A* и *B* равно 150 км. Из города *A* в город *B* выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе *C* и повернул обратно. Когда он вернулся в *A*, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от *A* до C. Ответ дайте в километрах.

10.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите *a*.

11

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\ln(x+11) + 7$ на отрезке $[-10{,}5;\, 0]$.

12.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\, 4\pi\right]$.

13.

Дан прямой круговой конус с вершиной *M*. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине *M*. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку *M* проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра *O* основания конуса до плоскости сечения.

14.

Решите неравенство $\left(\frac{1}{x^2 - 9x + 18} - \frac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x^3 - 11x^2 + 30x} \leqslant 0.$

15.

1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

16

В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* точки *M* и *N* — середины катетов *AC* и *BC* соответственно, *CH* — высота.

а) Докажите, что прямые *MH* и *NH* перпендикулярны.

б) Пусть *P* — точка пересечения прямых *AC* и *NH*, а *Q* — точка пересечения прямых *BC* и *MH*. Найдите площадь треугольника *PQM*, если *AH* = 4 и *BH* = 2.

17.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right) \leqslant 0, \\ y = ax+a+3 \end{cases}$$

не имеет решений.

18.

Известно, что a, b, c, d, e и f — это числа 2, 3, 4, 5, 6 и 8, расставленные без повторений в некотором, возможно ином, порядке.

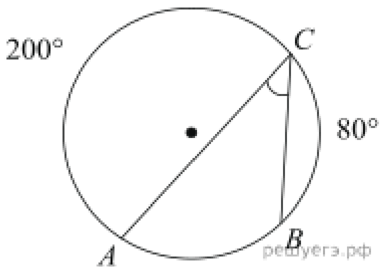
а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}=\dfrac{13}{2}$?

б) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}=\dfrac{481}{120}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}$?

Ответы и решения.

1.



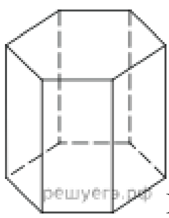
Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 200°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\cup AB = \frac{1}{2}(360^\circ - \cup AC - \cup CB) =$$
$$= \frac{1}{2}(360^\circ - 280^\circ) = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

2.



Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

Решение. Объем прямой призмы равен $V = Sh$, где S — площадь основания, а h — боковое ребро. Площадь правильного шестиугольника со стороной a, лежащего в основании, задается формулой

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда объем призмы равен $V = Sh = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4,5.$

Ответ: 4,5.

3.

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений − по одному от каждой страны. В первый день 36 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Каковы вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение. На третий день запланировано $\frac{60-36}{2} = 12$ выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна

$$\frac{12}{60} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

4.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

Решение. Рассмотрим события A = «учащийся решит 12 задач» и В = «учащийся решит больше 12 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 11 задач». События A и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,79 = P(A) + 0,7, откуда P(A) = 0,79 − 0,7 = 0,09.

Ответ: 0,09.

5.

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47) = 3.$

Решение. Последовательно получаем:

$$\log_8(5x+47) = 3 \Leftrightarrow 5x+47 = 8^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x+47 = 512 \Leftrightarrow x = 93.$$

Ответ: 93.

6.

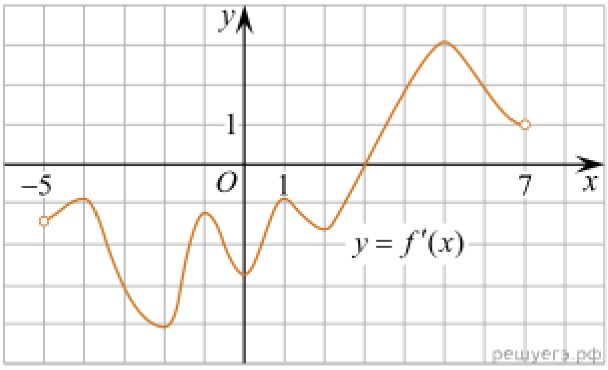
Найдите значение выражения $\frac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2}.$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2} = \frac{5^3a^6 \cdot 6^2b^2}{30^2a^6b^2} = \frac{5^3 \cdot 6^2}{5^2 \cdot 6^2} = 5.$$

Ответ: 5.

7.



На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;\ 4]$.

Решение. Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума. На интервале [–1; 4] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка 3 является точкой экстремума.

Ответ: 3.

8.

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 28 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $t \geqslant 28$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ, сопротивления резистора $R = 4 \cdot 10^6$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geqslant 28 \Leftrightarrow 1{,}4 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{12}{U} \geqslant 28 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{12}{U} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{12}{U} \geqslant 2 \Leftrightarrow U \leqslant 6$$ кВ.

Ответ: 6.

9.

Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Решение. Обозначим S км — расстояние от A до C, υ км/ч — скорость автомобиля, t ч — время движения мотоциклиста от A до C. Тогда $\left(t+\frac{1}{2}\right)\upsilon = 90t$ и $\left(2t+\frac{1}{2}\right)\upsilon = 150.$ Решим систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} \left(t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 90t, \\ \left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(t+\frac{1}{2}\right)\upsilon}{\left(2t+\frac{1}{2}\right)\upsilon} = \dfrac{90t}{150} \\ \left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 150 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2t+1}{2t+\frac{1}{2}} = \dfrac{6t}{5}, \\ \left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ \upsilon = 60. \end{cases}$$

Тогда $S = 90t = 90$ км.

Ответ: 90.

Приведём другой способ решения.

Обозначим υ км — скорость автомобиля. В момент выезда мотоциклиста между автомобилем и мотоциклом было 0,5υ км, и мотоциклист догонит автомобиль в городе C за $\dfrac{0,5\upsilon}{90-\upsilon}$ ч. За это же время мотоцикл вернётся в A, а автомобиль доедет до B.

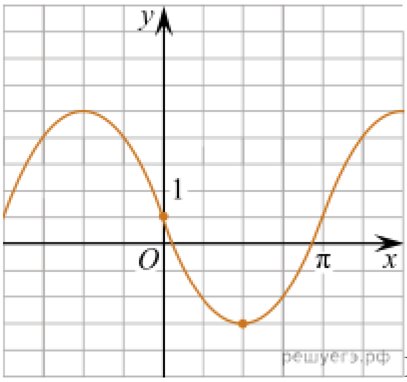
Всего автомобиль затратит времени $2\cdot\dfrac{0,5\upsilon}{90-\upsilon}+0,5.$ За это время он со скоростью υ проедет 150 км. Получим уравнение:

$$\left(\frac{\upsilon}{90-\upsilon}+0,5\right)\cdot\upsilon = 150 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5\upsilon^2+45\upsilon = 150\cdot 90-150\upsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \upsilon^2+390\upsilon-300\cdot 90 = 0.$$

Положительный корень уравнения $\upsilon = 60.$ Тогда мотоцикл затратит на дорогу до C $\dfrac{30}{30}=1$ час, а поскольку его скорость равна 90, то расстояние до C равно 90 км.

Ответ: 90.

10.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите a.

Решение. По графику, $f(0) = 0,5,$ тогда

$$a \cdot \sin 0 + b = 0,5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 0,5 \Leftrightarrow b = 0,5.$$

Далее, по графику, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1,5,$ тогда

$$a \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 0,5 = -1,5 \Leftrightarrow a \cdot 1 + 0,5 = -1,5 \Leftrightarrow a = -2.$$

Ответ: −2.

11.

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\ln(x+11) + 7$ на отрезке $[-10,5;\, 0]$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 9 - \frac{9}{x+11}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9 - \dfrac{9}{x+11} = 0, \\ -10,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ -10,5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -10.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:

В точке $x = -10$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

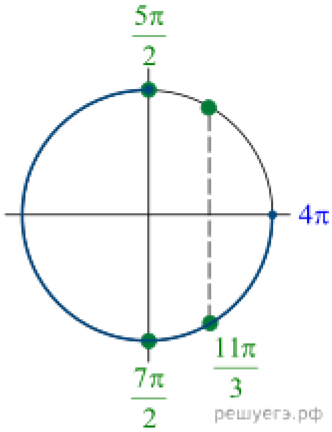
$$y(-10) = -9 \cdot 10 - 9\ln 1 + 7 = -83.$$

Ответ: −83.

12.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\, 4\pi\right].$



Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Отберем корни при помощи единичной тригонометрической окружности (см. рис.). На заданном отрезке лежат корни $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{11\pi}{3}.$

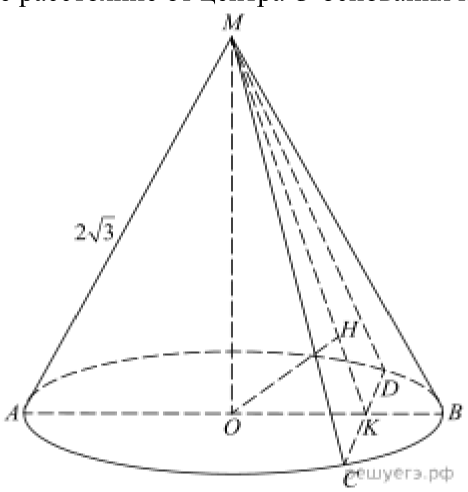
Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{11\pi}{3}.$

13.

Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}.$ Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.



Решение. а) Пусть AB — диаметр окружности, MO — высота конуса, и пусть плоскость сечения перпендикулярна образующей AM и пересекает основание по хорде CD. Прямая AM лежит в плоскости AMB и перпендикулярна хорде CD. Прямая MO лежит в плоскости AMB и перпендикулярна хорде CD как высота конуса, следовательно, плоскость AMB перпендикулярна прямой CD, а значит, диаметр AB перпендикулярен хорде CD. Пусть K — точка их пересечения. Заметим, что образующие MA, MB, MC и MD равны $2\sqrt{3},$ угол AMB равен 120°, откуда получаем, что углы MAB и MBA равны по 30°, следовательно, $MO=\sqrt{3}.$

Из теоремы Пифагора следует, что в прямоугольных треугольниках AMO и BMO катеты AO и BO равны 3, значит, диаметр AB равен 6. Рассмотрим треугольник AMK: он прямоугольный, так как прямые AM и MK перпендикулярны, с острым углом MAK, который равен 30°. Таким образом, $AK = 2MK = 2x$. Найдем x по теореме Пифагора для этого треугольника:

$$4x^2=x^2+(2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 3x^2=12 \Leftrightarrow x=2.$$

Рассмотрим теперь треугольник MCD, полученный в сечении. Он равнобедренный, в нем стороны MC и MD равны $2\sqrt{3},$ а высота MK равна 2. Таким образом,

$$KD=\sqrt{MD^2-MK^2}=$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2},$$

значит, $CD=4\sqrt{2}.$

В треугольнике MCD:

$$MC^2+MD^2=2\cdot(2\sqrt{3})^2=$$
$$=24<32=(4\sqrt{2})^2=CD^2.$$

Таким образом, получаем, что треугольник MCD — тупоугольный.

б) В плоскости MAB из точки O опустим перпендикуляр OH на прямую MK. Так как прямая CD перпендикулярна плоскости MAB, то прямые OH и CD перпендикулярны и, следовательно, OH является искомым расстоянием. Заметим, что $AK = 2MK = 4$, а $OK = AK - AO = 1$. Вычислим площадь треугольника MOK двумя способами:

$$S_{MOK}=\frac{1}{2}MK\cdot OH=\frac{1}{2}MO\cdot OK \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow OH=\frac{MO\cdot OK}{MK}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

14.

Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{x^2-9x+18}-\dfrac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x^3-11x^2+30x}\leqslant 0.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{1}{(x-3)(x-6)}-\frac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x(x^2-11x+30)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+(x-3)^2}{(x-3)(x-6)}\cdot\sqrt{x(x-5)(x-6)}\leqslant 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. При условии $(x-3)(x-6)\neq 0,$ выражение $x(x-5)(x-6)=0,$ откуда $x = 0$ или $x = 5$.

2. При условии $x(x-5)(x-6)>0$, выражение $\dfrac{1+(x-3)^2}{(x-3)(x-6)} \leqslant 0$, то есть $(x-3)(x-6)<0$. Получаем $3<x<5$.

Таким образом, решение неравенства: $\{0\} \cup (3; 5]$.

Ответ: $\{0\} \cup (3; 5]$.

15.

1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

Решение. Если первый платеж банку Аркадия составил x рублей, то второй составит $2x$ рублей, а третий — $3x$ рублей, всего $6x$ рублей, что равно 2 395 800, то есть $x = 2\,395\,800 : 6 = 399\,300$. Отсюда: $2x = 798\,600$, $3x = 1\,197\,900$.

Пусть в банке Аркадий взял в кредит S рублей.

Тогда его долг 01.03.2011 составил $1{,}1S$ рублей. После первого перечисления Аркадия долг снизился до $(1{,}1S - 399\,300)$ руб.

01.03.2012 банк начислил проценты на долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}1S - 399\,300) \cdot 1{,}1 = 1{,}21S - 439\,230$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 798 600 руб. Долг снизился до $1{,}21S - 439230 - 798600 = 1{,}21S - 1237830$ (руб.)

01.03.2013 банк начислил проценты на оставшийся долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}21S - 1237830) \cdot 1{,}1 = 1{,}331S - 1\,361\,613$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 1 197 900 руб. Кредит погашен полностью, долга у Аркадия нет.

Значит, $1{,}331S - 1\,361\,613 - 1\,197\,900 = 0 \Leftrightarrow 1{,}331S = 2\,559\,513 \Leftrightarrow S = 1\,923\,000$.

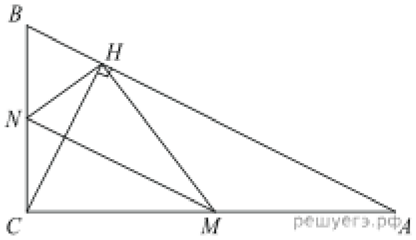
Ответ: 1 923 000 рублей.

16.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

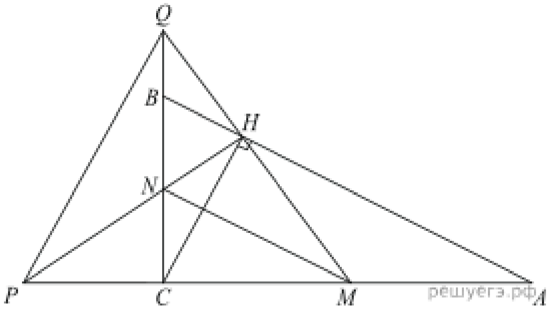


Решение. а) Треугольники AHC и BHC прямоугольные (рис. 1), поэтому $MH = \dfrac{AC}{2} = CM$ и $NH = \dfrac{CB}{2} = CN$. Значит, треугольники MCN и MHN равны по трём сторонам, откуда $\angle MHN = \angle MCN = 90^\circ$.

б) В прямоугольном треугольнике ABC имеем: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = 2\sqrt{2}$ (рис. 2).

В прямоугольном треугольнике MHP и MCQ с общим углом CMH получаем:

$$\frac{MH}{MP} = \frac{MC}{MQ} = \cos\angle CMH,$$



поэтому треугольники *MHC* и *MPQ* подобны с коэффициентом подобия $\cos\angle CMH$.

Площадь *S* треугольника *MHC* равна половине площади треугольника *AHC*, то есть $S=\dfrac{AH\cdot CH}{4}=2\sqrt{2}.$

Найдём $\cos\angle CMH$:

$$\cos\angle CMH=\cos(2\angle CAH)=$$
$$=2\cos^2\angle CAH-1=\frac{2AH^2}{AC^2}-1=\frac{2AH^2}{AH^2+CH^2}-1=\frac{1}{3}.$$

Значит, площадь треугольника *MPQ* равна $\dfrac{S}{\cos^2\angle CMH}=18\sqrt{2}.$

Ответ: б) $18\sqrt{2}.$

Площадь треугольника *PQM* равна половине произведения *QC* на *PM*. Для того, чтобы определить длины данных отрезков, можно два раза применить теорему Менелая к треугольнику *ABC*, заметив предварительно, что $CH=2\sqrt{2}, AC=2\sqrt{6}$ и $BC=2\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2\sqrt{6}+CP}{CP}=1 \text{ и } \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2\sqrt{3}+BQ}{BQ}=1,$$

откуда: $CP=2\sqrt{6}, BQ=2\sqrt{3}.$ Тогда $PM=3\sqrt{6}, QC=4\sqrt{3},$ следовательно,

$$S_{PQM}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{6}\cdot4\sqrt{3}=18\sqrt{2}.$$

Приведем решение пункта б)

Проведем отрезок *AQ*, получим треугольник *ACQ*, в котором *QM* будет медианой, а отрезок *AB* будет пересекать медиану в точке *H* и разбиваться этой точкой на отрезки длинной 4 и 2, считая от вершины *A*. Следовательно, *AB* тоже медиана, тогда *CB* = *BQ*, а треугольник *MPQ* равнобедренный с равными сторонами *HQ* и *CP*.

В треугольнике *ACQ* отрезки *QM* и *AB* медианы, значит, $QH=2MH=2CM==AC=\sqrt{AH\cdot AB}=2\sqrt{6},$ и $CB=BQ=\sqrt{BH\cdot AB}=2\sqrt{3}.$ В равнобедренном треугольнике *MPQ* имеем: $HQ=CP=\sqrt{6}.$ Тогда для площади треугольника *MPQ* получаем:

$$S_{MPQ}=\frac{1}{2}CQ\cdot MP=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{6}\cdot4\sqrt{3}=6\sqrt{18}=18\sqrt{2}.$$

17.

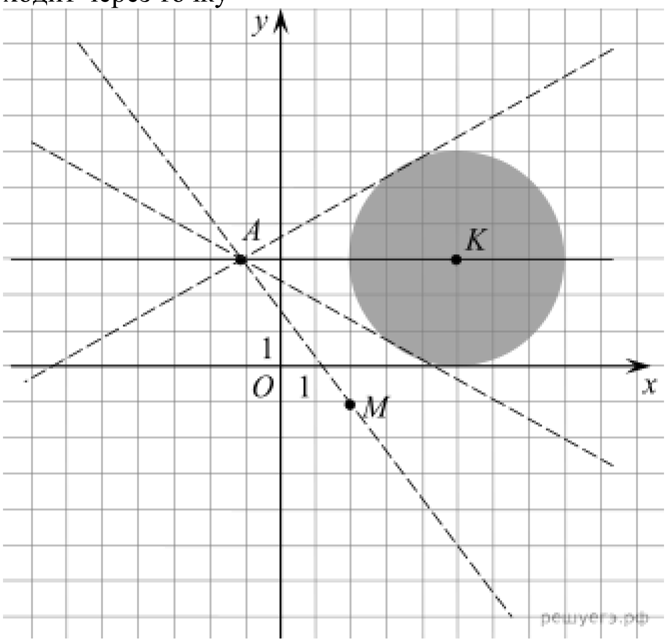
Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right)\leqslant 0,\\ y=ax+a+3\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Уравнение $y=ax+a+3$ задает прямую. Эта прямая при всех *a* проходит через точку $A(-1;3)$.

Неравенство системы $\left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right)\leqslant 0$ задает объединение круга с центром в точке $K(5;3)$ и радиусом 3 и точки $M(2;-1)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y=ax+a+3$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M.



Расстояние между точками $A(-1;3)$ и $K(5;3)$ равно 6, а радиус круга равен 3, значит, касательные к кругу проведённые из точки $A(-1;3)$, образуют углы $\dfrac{\pi}{6}$ с прямой AK. Этим касательным соответствуют значения $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Прямая *AM* имеет угловой коэффициент $-\dfrac{4}{3}$.

Отсюда получаем $a<-\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{4}{3}<a<-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ a>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

18.

Известно, что *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* — это числа 2, 3, 4, 5, 6 и 8, расставленные без повторений в некотором, возможно ином, порядке.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}=\dfrac{13}{2}$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{481}{120}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

Решение. а) Пусть $a=6, b=3, c=8, d=4, e=5$ и $f=2$. Тогда

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=2+2+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}.$$

б) Предположим, что это возможно. Дробь $\frac{481}{120}$ несократима и больше 4. Значит, наименьшее общее кратное знаменателей *b, d* и *f* дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ делится на 120. Поэтому числа *b, d* и *f* — это либо числа 3, 5 и 8, расставленные без повторений в некотором порядке, либо числа 5, 6 и 8, расставленные без повторений в некотором порядке. В первом случае сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ меньше, чем $\frac{6}{3}+\frac{6}{5}+\frac{6}{8}=\frac{79}{20}<4,$ во втором — меньше, чем $\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{8}<4.$ Пришли к противоречию.

в) Пусть числа *a, b, c, d, e* и *f* таковы, что сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ принимает наименьшее возможное значение. Если знаменатели *b, d* и *f* дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ — это не расставленные в некотором порядке числа 5, 6 и 8, то сумму $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ можно уменьшить, поменяв местами то из чисел 5, 6 или 8, которое попало в числитель, с тем из чисел 2, 3 или 4, которое попало в знаменатель. Далее без ограничения общности считаем, что $b=5, d=6$ и $f=8$.

Пусть *k, l, m* и *n* — какие-либо положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $k<m$ и $l<n$. Тогда

$$\left(\frac{m}{l}+\frac{k}{n}\right)-\left(\frac{k}{l}+\frac{m}{n}\right)=(m-k)\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{n}\right)>0$$

и, следовательно, $\frac{m}{l}+\frac{k}{n}>\frac{k}{l}+\frac{m}{n}.$ Поэтому если числители *a, c* и *e* дробей $\frac{a}{b}=\frac{a}{5}$, $\frac{c}{d}=\frac{c}{6}$ и $\frac{e}{f}=\frac{e}{8}$ не идут в порядке возрастания, то сумму $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ можно уменьшить, поменяв между собой те из этих числителей , которые идут в порядке убывания. Следовательно, наименьшее возможное значение суммы $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ равно $\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{7}{5}.$

Ответ: а) Да; б) нет; в) $\frac{7}{5}$.

Критерии оценивания

Отлично: 95 % - 100 % правильных ответов, глубокие познания в освоенном материале.

Хорошо: 75 % - 94 % правильных ответов, материал освоен полностью без существенных ошибок.

Удовлетворительно: 51 % - 74 % правильных ответов, материал освоен не полностью, имеются значительные пробелы в знаниях.

Неудовлетворительно: менее 50 % правильных ответов, материал не освоен, знания ниже базового уровня.

4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

4.1 Используемые образовательные технологии

Предметно-ориентированные технологии

4.2 Литература и электронные ресурсы:

Основная литература по дисциплине:

1. Атанасян, Л. С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия: 10—11-й классы: базовый и углублённый уровни : учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. — 12-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2023. — 287 с. — ISBN 978-5-09-112137-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/408659

2. Вернер, А. Л. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: 11-й класс: базовый уровень: учебник / А. Л. Вернер, А. П. Карп. — 4-е изд., стер. — Москва: - Просвещение, 2022. — 239 с. — ISBN 978-5-09-091757-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/334406

3. Мерзляк, А. Г. Математика. Геометрия: 11-й класс: углублённый уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под редакцией В. Е. Подольского. — 7-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2023. — 254 с. — ISBN 978-5-09-103610-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/334478

4. Пратусевич, М. Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : углублённый уровень : учебник / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. — 8-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 459 с. — ISBN 978-5-09-088448-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/334565

5. Муравин, Г. К. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа : 11-й класс : углублённый уровень : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — 9-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 318 с. — ISBN 978-5-09-091755-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/334676

Дополнительная литература:

1. Настольная книга учителя математики : справ.-метод. пособие / [сост. Л. О. Рослова]. - Москва : АСТ : Астрель, 2004 . - 429 с. - ISBN 5-17-027186-7. - Текст : непосредственный.
2. Поурочные разработки по геометрии : 11 класс : к учебному комплекту Л. С. Атанасяна и др. / [сост. В. А. Яровенко]. - Москва : ВАКО, 2019. - 336 с. - ISBN 978-5-408-04418-4. - Текст : непосредственный.

3. Оценка качества подготовки выпускников средней (полной) школы по математике / М-во образования Рос. Федерации; [Г.В. Дорофеев и др.]. — Москва : Дрофа, 2002. — 47 с. — ISBN 5-7107-5039-5. Текст : непосредственный.
4. Алгебра и начала анализа : учебник для 11 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А.В. Шевкин. — Москва : Просвещение, 2002. — 448 с. - ISBN 5-09-011241-X / Текст : непосредственный.
5. Алгебра и начала математического анализа : дидактические материалы для 11 класса: базовый и профильный уровни / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. - 2-е изд. - Москва : Просвещение, 2008. – 188 с. - ISBN 978-5-09-019314-6- Текст : непосредственный.
6. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 11 класса : Математика. Самостоятельные и контрольные работы. Геометрия. 11 класс : разноуровневые дидактические материалы / А. П. Ершова, В. В. Голобородько. - Москва : Илекса, 2003. - 160 с. - ISBN 5-89237-090-9. Текст : непосредственный.

Электронные ресурсы:

Портал https://ege.sdamgia.ru/