

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дискретные математические модели

---

Уровень высшего образования  
Магистратура

---

Направление подготовки / специальность  
01.04.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование физико-механических процессов

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.01 Дискретные математические модели относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-4: Способен разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	<p>ПК-4.1: Знает методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p> <p>ПК-4.2: Умеет применять методы разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p> <p>ПК-4.3: Имеет навыки применения методов разработки и анализа концептуальных и теоретических моделей решаемых научных проблем и задач</p>	<p>ПК-4.1: Знать методы разработки и анализа дискретных математических моделей, необходимые при решении исследовательских и практических задач, основы теории разностных схем, методы исследования устойчивости разностных схем</p> <p>ПК-4.2: Уметь применять методы исследования аппроксимации и устойчивости к известным и новым численным методам решения задач математической физики</p> <p>ПК-4.3: Владеть навыками применения методов разработки и анализа дискретных математических моделей решаемых научных проблем и задач</p>	Контрольная работа Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы Задания
ПК-5: Способен разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для	ПК-5.1: Знает типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности	ПК-5.1: Знать типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной	Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы Задания

решения задач научной деятельности	<p>ПК-5.2: Умеет применять типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности</p> <p>ПК-5.3: Имеет навыки разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности</p>	<p>деятельности</p> <p>ПК-5.2: Уметь применять типовые математические методы и методологии разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности</p> <p>ПК-5.3: Владеть навыками разработки системного и прикладного программного обеспечения для решения задач научной деятельности; численного решения задач математической физики с использованием современных программных комплексов</p>		
------------------------------------	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>42</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b>
	<b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Всего	

			(практические занятия/лабораторные работы), часы		
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Основные понятия теории разностных схем	16	4	6	10	6
Методы исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем.	20	8	6	14	6
Вариационно-разностные и конечно-элементные методы	29	8	8	16	13
Математические модели деформируемых тел и оболочек	20	6	6	12	8
Анализ численных схем теории упругости и теории оболочек	21	6	6	12	9
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	144	32	32	66	42

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение Знакомство с методами построения приближенных математических моделей в области механики деформируемого твердого тела и конструкций. Обзор современных численных методов решения многомерных задач механики сплошных сред.
2. Аппроксимация и устойчивость Методы анализа аппроксимации разностных схем. Анализ устойчивости численных схем решения задач математической физики.
3. Вариационные методы Построение численных схем на основе вариационных постановок задач. Вариационно-разностный метод. Метод конечных элементов. Построение явного вида сеточных операторов вариационных численных схем.
4. Математические модели механики твердого тела Одномерные, двумерные и трехмерные модели теории упругости и теории оболочек. Системы уравнений, постановки задач.
5. Численные методы в механике твердого тела Применение современных математических методов и компьютерных технологий при решении задач расчета конструкций на прочность и устойчивость; закрепление навыков на решении конкретных примеров.

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок выполнения, форма контроля)

- Повторение материала, пройденного на лекционных занятиях (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа)
- Выполнение заданий по теме учебного курса (2 раза за семестр, письменный отчет)
- Самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (опрос на занятиях семинарского типа)
- Подготовка к промежуточной аттестации (экзамен)

## 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

### 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

#### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

##### Задание 1

Записать дисперсионное уравнение для трехмерного сеточного волнового уравнения. Выразить частоту через волновой вектор.

##### Задание 2

Построить формулу численного дифференцирования для набора узлов  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,2)$ ,  $(-1,3,-4)$  в трехмерном пространстве

##### Задание 3

Построить конечно-разностное представление схемы МКЭ на базе 4-узлового билинейного КЭ для двумерной системы уравнений Ламе

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три не существенные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

#### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-4:

1. Аппроксимация, сходимость, устойчивость. Теорема Лакса о сходимости разностных схем.
2. Анализ аппроксимации разложением в ряд Тейлора. Примеры.
3. Устойчивость разностных схем решения линейных задач математической физики. Другое определение устойчивости.
4. Устойчивость по начальным данным, граничным условиям, правой части. Равномерная устойчивость по начальным данным.
5. Устойчивость сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума.

#### 5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Формулы естественной аппроксимации производных.
2. Аппроксимация частных производных методом наименьших квадратов.
3. Базисные и сопряженные сеточные операторы на равномерных косоугольных сетках.
4. Вариационно-разностный метод.
5. Формулы сеточного интегрирования по частям. Вывод сеточных уравнений Эйлера вариационной задачи.
6. Метод конечных элементов. Построение сеточных уравнений для схем МКЭ.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в

	ответа		Выполнены все задания, но не в полном объеме	ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-4

1. Аппроксимация, устойчивость и сходимость. Теорема Лакса.

2. Устойчивость разностных схем решения эллиптических уравнений. Принцип максимума.
3. Метод гармоник исследования устойчивости разностных схем решения параболических и гиперболических уравнений.
4. Теорема Куранта-Фридрихса-Леви.
5. Формулы естественной аппроксимации производных.

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Формулы сеточного интегрирования по частям. Вывод сеточных уравнений Эйлера вариационной задачи.
2. Метод конечных элементов. Построение сеточных уравнений для схем МКЭ.
3. Модели оболочек. Вывод уравнений теории пластин Тимошенко из вариационной задачи теории упругости.
4. Разностные схемы теории оболочек Тимошенко. Анализ сходимости.
5. Эквивалентные преобразования сеточных уравнений теории упругости и теории оболочек. Свойства индексной коммутативности.
6. Анализ устойчивости разностных схем решения задач теории упругости и теории оболочек.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-4

- Записать дисперсионное уравнение для трехмерного сеточного волнового уравнения. Выразить частоту через волновой вектор.
- Записать дисперсионное уравнение для одномерной системы уравнений теории пластин типа Тимошенко. Выразить частоту через волновое число.



- Построить формулу численного дифференцирования для набора узлов  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,2)$ ,  $(-1,3,-4)$  в трехмерном пространстве
- Для косоугольной равномерной двумерной сетки (решетки Браве), заданной парой векторов  $(2,1)$ ,  $(1,3)$  построить базисные и сопряженные операторы численного дифференцирования и их попарные суперпозиции

### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5

- Исследовать аппроксимацию разностной схемы «кабаре»
- Исследовать на устойчивость разностную схему «уголок» (один из четырех вариантов, предложенный преподавателем).
- Исследовать на устойчивость разностную схему «чехарда» Писмэна-Рэтфорда.
- Исследовать на устойчивость разностную схему «крест» решения двумерного волнового уравнения с использованием теоремы Куранта-Фридрихса-Леви.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Баженов В. Г. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом : учеб. пособие / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 2000. - 107 с. : ил., табл., граф., схемы. - ISBN 5-85746-474-9 : 25.00., 15 экз.
2. Чекмарев Д. Т. Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и КЭ схем : учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и

механике» / Чекмарев Д. Т. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2007. - 88 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Информатика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730351&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Самарский А. А. Численные методы математической физики : учеб. пособие. - 2-е изд. - М. : Научный мир, 2003. - 316 с. - Библиогр.: с. 311 - 312. - Предм. указ.: с. 313 - 315. - ISBN 5-89176-196-3 : 45.00., 1 экз.
2. Васидзу Кюнтиро. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / пер. с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна ; под ред. Н. В. Баничука. - М. : Мир, 1987. - 542 с. : ил. - 50.00., 4 экз.
3. Марчук Гурий Иванович. Методы вычислительной математики : учеб. пособие. - 3-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Наука, 1989. - 608 с. - 21.00., 3 экз.
4. Баженов Валентин Георгиевич. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек / Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 1992. - 159 с. : ил. - 220.00., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Чекмарев Д.Т., Жидков А.В. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. -53 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Chekmarev-Zhidkov.doc](http://www.unn.ru/books/met_files/Chekmarev-Zhidkov.doc)
2. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Оценки устойчивости и повышение эффективности численных схем решения задач динамики сплошных сред и конструкций. Учебно- методический материал по программе повышения квалификации «Применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики». Нижний Новгород, 2007, 98 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/UMM\\_BC.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/UMM_BC.pdf)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: экран, проектор

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Чекмарев Дмитрий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.