

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Устойчивость разностных схем

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование и вычислительная математика

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.09.01 Устойчивость разностных схем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-5: Способен проектировать программное обеспечение	<p>ПК-5.1: Знает типовые решения, библиотеки программных модулей, шаблоны, классы объектов, используемые при разработке программного обеспечения</p> <p>ПК-5.2: Знает методы и средства проектирования программного обеспечения</p> <p>ПК-5.3: Знает методы и средства проектирования баз данных</p> <p>ПК-5.4: Умеет использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения</p> <p>ПК-5.5: Умеет применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных</p>	<p>ПК-5.1: Знать основы теории разностных схем, методы исследования устойчивости разностных схем</p> <p>ПК-5.2: Уметь применять методы исследования аппроксимации и устойчивости к известным и новым численным методам решения задач математической физики</p> <p>ПК-5.3: Уметь применять методы численного решения задач математической физики с использованием современных программных комплексов</p> <p>ПК-5.4: Уметь использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения</p> <p>ПК-5.5: Уметь применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных</p>	<p>Задания</p> <p>Собеседование</p>	<p>Зачёт:</p> <p>Контрольные вопросы</p> <p>Задания</p>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>2</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>48</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>0</b>
- КСР	<b>1</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>23</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>0</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
Основные понятия теории разностных схем	11	7		7	4
Методы исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем.	27	18		18	9
Вариационно-разностные и конечно-элементные методы	12	9		9	3
Математические модели деформируемых тел и оболочек	13	7		7	6
Анализ численных схем теории упругости и теории оболочек	8	7		7	1
Аттестация	0				
КСР	1			1	
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>48</b>	<b>0</b>	<b>49</b>	<b>23</b>

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Основные понятия теории разностных схем. Корректная задача математической физики. Сетка, сеточная задача. Корректность сеточной задачи. Аппроксимация, устойчивость, сходимости. Теорема

Лакса

2. Методы исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем. Анализ аппроксимации методом разложения в ряд Тейлора. Метод дифференциального приближения. Специфика аппроксимации систем уравнений. Суммарная аппроксимация, скрытая точность. Методы исследования устойчивости: принцип максимума, метод гармоник, спектральный критерий Неймана, теорема Куранта-Фридрихса-Леви.

3. Вариационно-разностные и конечно-элементные методы Вариационные постановки задач математической физики. Конечно-разностная аппроксимация вариационного уравнения. Вариационно-разностный метод. Проекционные методы решения вариационных задач. Методы Ритца и Бубнова-Галеркина. Метод конечных элементов. Техника метода конечных элементов. Построение явного вида сеточных операторов вариационно-разностных и конечно-элементных схем.

4. Математические модели деформируемых тел и оболочек Уравнения теории упругости и пластичности. Системы уравнений Ламе и Прандтля-Рейсса. Задачи статики и динамики. Типы упругих волн. Плоская задача теории упругости. Математические модели стержней. Инженерные гипотезы расчета стержней. Теория оболочек. Модели оболочек Кирхгофа-Лява и Тимошенко. Специфика и свойства уравнений теории оболочек.

5. Анализ численных схем теории упругости и теории оболочек Конечно-разностные, вариационно-разностные и конечно-элементные схемы решения задач расчета упругих тел, стержней, пластин и оболочек. Анализ аппроксимации и устойчивости. Особенности численных схем теории оболочек типа Тимошенко. Улучшение устойчивости схем.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (в течение семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5:**

*Задание 1*

Записать дисперсионное уравнение для трехмерного сеточного волнового уравнения. Выразить частоту через волновой вектор.

#### Задание 2

Построить формулу численного дифференцирования для набора узлов  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,2)$ ,  $(-1,3,-4)$  в трехмерном пространстве

#### Задание 3

Построить конечно-разностное представление схемы МКЭ на базе 4-узловой билинейной КЭ для двумерной системы уравнений Ламе

#### Задание 4

Записать дисперсионное уравнение для одномерной системы уравнений теории пластин типа Тимошенко. Выразить частоту через волновое число.

#### Задание 5

Для косоугольной равномерной двумерной сетки (решетки Браве), заданной парой векторов  $(2,1)$ ,  $(1,3)$  построить базисные и сопряженные операторы численного дифференцирования и их попарные суперпозиции

#### Задание 6

Построить конечно-разностное представление вариационно-разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона на треугольной сетке

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-5:

1. Аппроксимация, сходимость, устойчивость. Теорема Лакса о сходимости разностных схем.
2. Анализ аппроксимации разложением в ряд Тейлора. Примеры.
3. Устойчивость разностных схем решения линейных задач математической физики. Другое определение устойчивости.

4. Устойчивость по начальным данным, граничным условиям, правой части. Равномерная устойчивость по начальным данным.
5. Устойчивость сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума.
6. Устойчивость разностных схем решения гиперболических и параболических уравнений. Равномерная устойчивость по начальным данным.
7. Метод гармоник. Примеры исследования устойчивости разностных схем решения параболических и гиперболических задач.
8. Устойчивость схемы «уголок» решения уравнения переноса.
9. Схема «кабаре» решения уравнения переноса. Анализ аппроксимации и устойчивости.
10. Теорема Куранта-Фридрихса-Леви. Примеры применения к анализу устойчивости гиперболических задач.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность	При решении стандартных задач не продемонстрированы	Продемонстрированы основные умения.	Продемонстрированы все основные	Продемонстрированы все основные	Продемонстрированы все основные	Продемонстрированы все основные умения.

	оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	ованы основные умения. Имели место грубые ошибки	Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-5

1. Аппроксимация, устойчивость и сходимости. Теорема Лакса.
2. Устойчивость разностных схем решения эллиптических уравнений. Принцип максимума.
3. Метод гармоник исследования устойчивости разностных схем решения параболических и гиперболических уравнений.
4. Теорема Куранта-Фридрихса-Леви.
5. Формулы естественной аппроксимации производных.
6. Аппроксимация частных производных методом наименьших квадратов.
7. Базисные и сопряженные сеточные операторы на равномерных косоугольных сетках.
8. Вариационно-разностный метод.
9. Формулы сеточного интегрирования по частям. Вывод сеточных уравнений Эйлера вариационной задачи.
10. Метод конечных элементов. Построение сеточных уравнений для схем МКЭ.
11. Модели оболочек. Вывод уравнений теории пластин Тимошенко из вариационной задачи теории упругости.
12. Разностные схемы теории оболочек Тимошенко. Анализ сходимости.
13. Эквивалентные преобразования сеточных уравнений теории упругости и теории оболочек. Свойства индексной коммутативности.
14. Анализ устойчивости разностных схем решения задач теории упругости и теории оболочек.
15. Влияние взаимного расположения конечных элементов на аппроксимацию уравнений теории упругости.
16. Ажурные схемы метода конечных элементов.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки

### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-5

- Исследовать аппроксимацию разностной схемы «кабаре»
- Исследовать на устойчивость разностную схему «уголок» (один из четырех вариантов, предложенный преподавателем).
- Исследовать на устойчивость разностную схему «чехарда» Писмэна-Рэтфорда.
- Исследовать на устойчивость разностную схему «крест» решения двумерного волнового уравнения с использованием теоремы Куранта-Фридрихса-Леви.
- Записать дисперсионное уравнение для трехмерного сеточного волнового уравнения. Выразить частоту через волновой вектор.
- Записать дисперсионное уравнение для одномерной системы уравнений теории пластин типа Тимошенко. Выразить частоту через волновое число.
- Построить формулу численного дифференцирования для набора узлов  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,1)$ ,  $(1,1,2)$ ,  $(-1,3,-4)$  в трехмерном пространстве

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Баженов В. Г. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом : учеб. пособие / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 2000. - 107 с. : ил., табл., граф., схемы. - ISBN 5-85746-474-9 : 25.00., 15 экз.
2. Чекмарев Д. Т. Автоматическое построение и анализ конечно-разностного представления вариационно-разностных и КЭ схем : учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике» / Чекмарев Д. Т. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2007. - 88 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Информатика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730351&idb=0>.
3. Баженов В. Г. Оценки устойчивости и повышение эффективности численных схем решения задач динамики сплошных сред и конструкций : учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «применение программных средств в научных исследованиях и преподавании математики и механики» / Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2007. - 98 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Физика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730350&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Самарский Александр Андреевич. Численные методы : [учеб. пособие для вузов по специальности "Прикладная математика"]. - М. : Наука, 1989. - 429, [1] с. : ил. - ISBN 5-02-013996-3 (в пер.) : 1.20., 44 экз.
2. Васидзу Кюнтиро. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / пер. с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна ; под ред. Н. В. Баничука. - М. : Мир, 1987. - 542 с. : ил. - 50.00., 4 экз.
3. Марчук Гурий Иванович. Методы вычислительной математики : учеб. пособие. - 3-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Наука, 1989. - 608 с. - 21.00., 3 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Чекмарев Д.Т., Жидков А.В. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы МКЭ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2010. -53 с. [http://www.unn.ru/books/met\\_files/Chekmarev-Zhidkov.doc](http://www.unn.ru/books/met_files/Chekmarev-Zhidkov.doc)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран)

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Чекмарев Дмитрий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.