

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 13 от 30.11.2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
28.03.01 - Нанотехнологии и микросистемная техника

Направленность образовательной программы
Материалы микро- и наносистемной техники

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2023 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.06.03 Линейная алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	ОПК-1.1: Знает фундаментальные законы физики и математики, методы математического анализа и моделирования ОПК-1.2: Умеет решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общеинженерных знаний ОПК-1.3: Иметь навыки применения физических законов и математических методов для решения задач профессиональной деятельности теоретического и прикладного характера	ОПК-1.1: Знание фундаментальных законов и практически ориентированных результатов линейной алгебры ОПК-1.2: Умение решать задачи профессиональной деятельности на основе применения знаний в области линейной алгебры ОПК-1.3: Владение навыками применения математических методов линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности теоретического и прикладного характера	Контрольная работа	Экзамен: Задачи Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	

- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	42
Промежуточная аттестация	36 экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
1. Введение. Алгебра матриц. Определители. Понятие матрицы. Основные операции над матрицами, функции от матриц. Специальные виды матриц (симметричные, эрмитовы, ортогональные) Определители, основные свойства и методы вычисления определителей. Формула полного разложения определителя и теорема Лапласа. Понятие обратной матрицы, нахождение ее элементов как решение систем уравнений. Решение матричных уравнений. Линейная независимость строк и ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.	20	6	6	12	8
2. Системы линейных уравнений. Определение и свойства систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера. Системы однородных линейных уравнений, свойства фундаментальной системы решений как векторного пространства. Нахождение общего решения системы неоднородных линейных уравнений.	16	4	6	10	6
3. Линейные пространства. Определение и свойства линейного пространства. Базис и размерность в линейных пространствах. Подпространства линейных пространств. Разложение пространства в прямую сумму подпространств. Преобразование базисов и координат векторов, матрица преобразования. Евклидовы пространства, свойства скалярного произведения, матрица Грама. Ортонормированный базис, метод ортогонализации Грама-Шмидта. Комплексные евклидовы пространства.	26	8	8	16	10
4. Линейные операторы. Определение и свойства линейного оператора. Матричное представление линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор, самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов. Ортогональные и унитарные операторы.	26	8	8	16	10
5. Квадратичные формы. Определение и свойства билинейных и квадратичных форм. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной и квадратичной формы при замене базиса. Метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований и метод Якоби для приведения квадратичной формы к диагональному виду. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.	18	6	4	10	8
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	32	32	66	42

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Д.В. Хомицкий, "Основы аналитической геометрии и линейной алгебры", конспект лекций, 2022.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Тема «Матрицы, матричные уравнения, системы линейных уравнений»

Вариант 1

Задание 1

Найти коммутатор $[\sigma_x, \sigma_y]$ для матриц Паули $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Задание 2

Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найти общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Вариант 2

Задание 1

Найти коммутатор $[\sigma_x, \sigma_z]$ для матриц Паули $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2

Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найти общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Обучаемый успешно решил половину или более половины задач из контрольной работы
не зачтено	Обучаемый решил менее половины задач из контрольной работы

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с детальным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации

5.3.1 Типовые задания, выносимые на промежуточную аттестацию:

Оценочное средство - Задачи

Экзамен

Критерии оценивания (Задачи - Экзамен)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил в полном объёме на вопрос в билете, а также на дополнительный вопрос повышенной трудности.
отлично	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил в полном объёме на вопрос в билете, а также на дополнительный вопрос.
очень хорошо	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил в полном объёме на вопрос в билете, но не ответил в полном объёме на дополнительный вопрос.
хорошо	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил с достаточной полнотой на вопрос в билете, демонстрируя навыки обоснования теоретических положений с помощью преподавателя.
удовлетворительно	Обучаемый применял правильные методы для решения задачи в билете и рассказал основные положения теоретического вопроса без

Оценка	Критерии оценивания
	обоснования, с помощью преподавателя.
неудовлетворительно	Обучаемый не смог применить правильные методы для решения задачи в билете и не рассказал основные положения теоретического вопроса.
плохо	Обучаемый не смог продемонстрировать какие-либо методы для решения задачи в билете и не рассказал никаких положений теоретического вопроса.

Типовые задания (Задачи - Экзамен) для оценки сформированности компетенции ОПК-1
(Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования)

Задание 1.

При каких значениях параметра λ квадратичная форма с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix}$ является положительно определённой?

Задание 2.

При каких значениях параметра λ квадратичная форма с матрицей $\begin{pmatrix} -9 & 3\lambda \\ 3\lambda & -1 \end{pmatrix}$ является отрицательно определённой?

Задание 3.

При каких значениях параметра λ квадратичная форма с матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ является положительно определённой?

Задание 4.

Решить матричное уравнение: $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

Задание 5.

Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

Задание 6.

Найти коэффициенты a_0, a_1, a_2 многочлена второй степени $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, если известно, что $f(1)=-1, f(-1)=9, f(2)=-3$.

Задание 7.

Пусть $A(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ – квадратичная форма в линейном пространстве L . Является ли линейным подпространством L множество M векторов $\mathbf{x}_M \in M$ таких, что $A(\mathbf{x}_M) \geq 0$?

Задание 8.

Решить матричное уравнение: $X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$

Задание 9.

Методом Лагранжа привести квадратичную форму в пространстве R_2

$A(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2$ к диагональному виду. Является ли эта форма знакоопределённой?

Задание 10.

Дано пространство P_n многочленов степени не выше n . Показать, что множество L элементов $f(t)$ этого пространства, для которых $f(1)=0$, образует подпространство, и найти его размерность.

Задание 11.

В пространстве многочленов $f(t)$ степени не выше 2 определено скалярное произведение $(f, g) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 g_2$, где f_k и g_k — коэффициенты при степенях t . Проверить, что при таком скалярном произведении базис $\{1, t, t^2\}$ является ортонормированным. Найти матрицу сопряжённого оператора D^* для оператора дифференцирования $D = d/dt$ в данном базисе.

Задание 12.

Найти ядро и образ оператора \hat{A} (указать базис в $\ker \hat{A}$ и $\operatorname{im} \hat{A}$) для оператора, заданного своей матрицей A в стандартном базисе пространства R_2 : $A = \begin{pmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{pmatrix}$.

Задание 13.

В пространстве вещественных матриц $N \times N$ определено скалярное произведение $(X, Y) = \sum_{i,j} x_{ij} \cdot y_{ij}$. В этом же пространстве действует оператор $\phi(X)$ по правилу $\phi(X) = AX$, где A — фиксированная матрица $N \times N$. Найти сопряжённый оператор ϕ^* , предполагая, что он действует как $\phi^*(X) = A^* X$, где A^* — некоторая неизвестная матрица.

Задание 14.

Найти ядро и образ оператора \hat{A} (указать базис в $\ker \hat{A}$ и $\operatorname{im} \hat{A}$) для оператора, заданного своей матрицей A в стандартном базисе пространства R_3 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 15.

Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 14 & 23 \end{pmatrix}$.

Задание 16.

Дано матричное уравнение $A^2 + A + E = O$, где E — единичная, а O — нулевая матрица. Найти из уравнения матрицу A^{-1} для матрицы A .

Задание 17.

Вычислить определитель матрицы $N \times N$ с элементами $A = \|a_{ij}\|$, зная, что сумма её строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами.

Задание 18.

Найти образ, ядро, и матрицу оператора дифференцирования $\hat{D} = d/dx$ в базисе $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ пространства P_n многочленов степени не выше n .

Задание 19.

Дана строка $a^T = (a_1, \dots, a_n)$ и столбец $b = (b_1, \dots, b_n)^T$. Вычислить ранг матрицы $A = b \cdot a^T$.

Задание 20.

Среди многочленов $f(t)$ степени, не превосходящей 2, найти два линейно независимых многочлена f_1 и f_2 , таких, что $f_1(1) = f_2(1) = 4$.

Оценочное средство - Контрольные вопросы

Экзамен

Критерии оценивания (Контрольные вопросы - Экзамен)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил в полном объёме на вопрос в билете, а также на дополнительный вопрос повышенной трудности.
отлично	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил в полном объёме на вопрос в билете, а также на дополнительный вопрос.
очень хорошо	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил в полном объёме на вопрос в билете, но не ответил в полном объёме на дополнительный вопрос.
хорошо	Обучаемый самостоятельно и правильно решил задачу в билете и ответил с достаточной полнотой на вопрос в билете, демонстрируя навыки обоснования теоретических положений с помощью преподавателя.
удовлетворительно	Обучаемый применял правильные методы для решения задачи в билете и рассказал основные положения теоретического вопроса без обоснования, с помощью преподавателя.
неудовлетворительно	Обучаемый не смог применить правильные методы для решения задачи в билете и не рассказал основные положения теоретического вопроса.
плохо	Обучаемый не смог продемонстрировать какие-либо методы для решения задачи в билете и не рассказал никаких положений теоретического вопроса.

Типовые задания (Контрольные вопросы - Экзамен) для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе применения естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования)

№	Вопросы	Код формируемой компетенции
1	Матрицы. Основные операции над матрицами.	ОПК-1
2	Определители. Основные свойства. Формулировка теоремы Лапласа.	ОПК-1
3	Обратная матрица. Нахождение ее элементов как решение систем	ОПК-1

	уравнений.	
4	Линейная независимость строк и ранг матрицы.	ОПК-1
5	Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.	ОПК-1
6	Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.	ОПК-1
7	Общее решение системы неоднородных линейных уравнений.	ОПК-1
8	Линейные пространства. Базис и размерность.	ОПК-1
9	Подпространства линейных пространств.	ОПК-1
10	Преобразование базисов и координат векторов. Матрица преобразования.	ОПК-1
11	Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения. Матрица Грама. Ортонормированный базис. Комплексные евклидовы пространства.	ОПК-1
12	Метод ортогонализации Грама-Шмидта.	ОПК-1
13	Линейные операторы, свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.	ОПК-1
14	Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов.	ОПК-1
15	Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор.	ОПК-1
16	Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов.	ОПК-1
17	Ортогональные и унитарные операторы.	ОПК-1
18	Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.	ОПК-1
19	Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду	ОПК-1
20	Метод ортогональных преобразований приведения квадратичной формы к диагональному виду	ОПК-1
21	Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра	ОПК-1

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Беклемишев Дмитрий Владимирович. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : [учеб. для вузов]. - 5-е изд., перераб. - М. : Наука, 1984. - 320 с. - 0.80., 240 экз.

2. Ильин Владимир Александрович. Линейная алгебра : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Физика" и "Прикладная математика". - М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. - 296 с. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 6). - 0.77., 160 экз.
3. Беклемишева Людмила Анатольевна. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : [учеб. пособие для физ.-мат., инженер.-физ. и инженер.-техн. специальностей вузов] / под ред. Д. В. Беклемишева. - М. : Наука, 1987. - 494, [2] с. - 1.30., 63 экз.
4. Хомицкий Д. В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во Нижегород. госун-та, 2007. - 51 с. - 20.00., 50 экз.

Дополнительная литература:

1. Курош Александр Геннадиевич. Курс высшей алгебры : учеб. для студентов ун-тов. - Изд. 11-е, стер. - М. : Наука, 1975. - 431 с. : с черт. - 0.94., 38 экз.
2. Проскуряков Игорь Владимирович. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей вузов. - Изд. 7-е. - М. : Наука, 1984. - 336 с. - 1.20., 96 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Не используется

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению 28.03.01 - Нанотехнологии и микросистемная техника.

Автор(ы): Хомицкий Денис Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Павлов Дмитрий Алексеевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.11.2022, протокол № б/н.