

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от "30"ноября 2022 г.
№13

Рабочая программа дисциплины
«Применения вероятностных метрик»

Уровень высшего образования
Подготовка научных и научно-педагогических кадров

Научные специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика, 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела, 1.2.1. Искусственный интеллект и машинное обучение, 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, 1.3.11. Физика полупроводников, 1.3.19. Лазерная физика, 1.3.4. Радиофизика, 1.3.7. Акустика, 1.3.8. Физика конденсированного состояния, 1.4.1. Неорганическая химия, 1.4.2. Аналитическая химия, 1.4.3. Органическая химия, 1.4.4. Физическая химия, 1.4.7. Высокомолекулярные соединения, 1.4.8. Химия элементоорганических соединений, 1.5.11. Микробиология, 1.5.15. Экология, 1.5.2. Биофизика, 1.5.21. Физиология и биохимия растений, 1.5.5. Физиология человека и животных, 2.2.2. Электронная компонентная база микро и нанoeлектроники, квантовых устройств, 3.2.7. Аллергология и иммунология, 5.1.1. Теоретико-исторические правовые науки, 5.1.2. Публично-правовые (государственно-правовые) науки, 5.1.3. Частно-правовые (цивилистические) науки, 5.1.4. Уголовно-правовые науки, 5.1.5. Международно-правовые науки, 5.12.1. Междисциплинарные исследования когнитивных процессов, 5.2.3. Региональная и отраслевая экономика, 5.2.4. Финансы, 5.2.6. Менеджмент, 5.3.7. Возрастная психология, 5.4.2. Экономическая социология, 5.4.4. Социальная структура, социальные институты и процессы, 5.4.6. Социология культуры, 5.4.7. Социология управления, 5.5.2. Политические институты, процессы, технологии, 5.5.4. Международные отношения, глобальные и региональные исследования, 5.6.1. Отечественная история, 5.6.2. Всеобщая история, 5.6.7. История международных отношений и внешней политики, 5.7.1. Онтология и теория познания, 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания, 5.8.7. Методология и технология профессионального образования, 5.9.2. Литературы народов мира, 5.9.5. Русский язык. Языки народов России, 5.9.6. Языки народов зарубежных стран (с указанием конкретного языка или группы языков), 5.9.9. Медиакоммуникации и журналистика

Нижний Новгород
2023 год

1. Место и цель дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Применения вероятностных метрик» относится к числу факультативных дисциплин образовательного компонента программы аспирантуры и изучается на 3 году обучения в 5 семестре.

Цель дисциплины – ознакомить аспирантов с современными подходами к формулировке понятия близости случайных элементов для доказательства предельных теорем, для исследования непрерывности вероятностных моделей случайных эволюционных экспериментов.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Выпускник, освоивший программу, должен

Знать:

- Знать основные примеры и классы вероятностных метрик
- Знать некоторые методы сравнения вероятностных метрик

Уметь:

- Вычислять типовые вероятностные метрики для различных вероятностных распределений
- Применять свойства вероятностных метрик для доказательства предельных теорем

Владеть:

- навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач теории вероятностей и математической статистики

3. Структура и содержание дисциплины.

Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., всего – 72 часа, из которых 36 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа – 18 часов, семинарского типа – 18 часов), 36 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

Таблица 2

Структура дисциплины

Наименование раздела дисциплины	Всего, часов	В том числе					
		Контактная работа, часов					Самостоятельная работа обучающегося, часов
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации	Всего	
1. Вероятностные метрики и их свойства	38	4	16	0	0	20	18
2. Характеризация свойств распределений	10	4	0	0	0	4	6
3. Метрические оценки распределения моментов отказа	14	6	2	0	0	8	6
4. Метрическая оценка устойчивости моделей обслуживания	10	4	0	0	0	4	6
Промежуточная аттестация – зачет							
Итого	72	18	18	0	0	36	36

Таблица 3**Содержание дисциплины**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Форма проведения занятия	Форма текущего контроля*
1.	Вероятностные метрики и их свойства	Определение вероятностной метрики. Простые и сложные метрики. Минимальные и протоминимальные метрики. Идеальные метрики	лекции, практики	Собеседование, практические задания
2.	Характеризация свойств распределений	Характеризация пуассоновского потока свойством старения. Характеризация пуассоновского потока свойством отсутствия последствия.	лекции	Собеседование, практические задания
3.	Метрические оценки распределения моментов отказа	Понятие регенерирующего процесса. Момент отказа. Неравномерные оценки момента отказа. Равномерные оценки момента отказа. Метрические оценки распределения момента отказа.	лекции, практики	Собеседование, практические задания
4	Метрическая оценка устойчивости моделей обслуживания	Модели обслуживания и их формализация. Понятие о непрерывности модели обслуживания. Непрерывность на конечных промежутках времени. Оценки для последовательностей, порожденных кусочно-линейными преобразованиями.	лекции	Собеседование, практические задания

4. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся

Контроль самостоятельной работы – практические задания. При подготовке к занятиям обучающиеся изучают и повторяют разделы теоретического материала по конспектам и по учебникам и монографиям из списка литературы. Затем обучающиеся прорешивают предложенные задачи.

5. Фонд оценочных средств для аттестации по дисциплине**5.1. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине.**

При выполнении всех работ учитываются следующие **основные критерии**:

- уровень теоретических знаний (подразумевается не только формальное воспроизведение информации, но и понимание предмета, которое подтверждается правильными ответами на дополнительные, уточняющие вопросы, заданные членами комиссии);
- умение использовать теоретические знания при анализе конкретных проблем, ситуаций;
- качество изложения материала, то есть обоснованность, четкость, логичность ответа, а также его полнота (то есть содержательность, не исключающая сжатости);
- способность устанавливать внутри- и межпредметные связи,
- оригинальность мышления, знакомство с дополнительной литературой и другие факторы.

Описание шкалы оценивания на промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Уровень подготовленности, характеризующий оценкой
<i>Зачтено</i>	владение программным материалом, понимание сущности рассматриваемых процессов и явлений, умение самостоятельно обозначить проблемные ситуации в организации научных исследований, способность критически анализировать и сравнивать существующие подходы и методы к оценке результативности научной деятельности, свободное владение источниками, умение четко и ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.
<i>Не зачтено</i>	непонимание смысла ключевых проблем, недостаточное владение науковедческой терминологией, неумение самостоятельно обозначить проблемные ситуации, неспособность анализировать и сравнивать существующие концепции, подходы и методы, неумение ясно излагать результаты собственной работы, следовать нормам, принятым в научных дискуссиях.

5.2. Примеры типовых контрольных заданий или иных материалов, используемых для оценивания результатов обучения по дисциплине

Практические задания:

Задача 1. Вычислить расстояние Леви между равномерными распределениями на $(0, 1)$ и $(0, 2)$.

Задача 2. Вычислить расстояние Леви между равномерными распределениями с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями $(\sigma_1)^2$, $(\sigma_2)^2$ ($\sigma_1 < \sigma_2$).

Задача 3. Доказать, что если $P(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $L(X, Y) < \varepsilon$.

Задача 4. Пусть X, Y – независимые, одинаково распределённые целочисленные случайные величины. Найти выражение для $i(X, Y)$.

Задача 5. Доказать неравенство: $\rho(X, Y) \leq i(X, Y)$.

Задача 6. Указать распределение, равноудалённое в равномерной метрике от двух нормальных распределений с математическими ожиданиями a_1 и a_2 и среднеквадратическими отклонениями σ_1, σ_2 соответственно.

Задача 7. На вероятностном пространстве (Ω, F, P) , представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с σ -алгеброй борелевских множеств в качестве F и мерой Лебега в качестве P , вычислить $K(X, Y)$, если:

- а) X – индикатор отрезка $[0, 1/2]$, Y – индикатор отрезка $[1/2, 1]$;
- б) $X = X(\omega) = \omega$, $Y = Y(\omega) = \omega/2$.

Задача 8. Пусть X – бернуллиевская случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$, Y – пуассоновская случайная величина со средним p . Показать, что $\sigma(X, Y) \leq (9/4)p^2$. Вывести отсюда и из свойства идеальности расстояния полной вариации следующее утверждение. Пусть X – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностями успеха p_1, p_2, \dots, p_n , Y – пуассоновская случайная величина с математическим ожиданием $p_1 + p_2 + \dots + p_n$, тогда

$$\sigma(X, Y) \leq (9/4)(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2).$$

Задача 9. Пусть μ – одна из следующих метрик: равномерная, метрика Ки-Фан, сложная средняя, индикаторная, метрика Прохорова–Леви, средняя, полной вариации. Докажите, что $\mu(\max\{0, X\}, \max\{0, Y\}) \leq \mu(X, Y)$.

Задача 10. Докажите, что для простой метрики $J(X, Y) = |\mathbf{MX} - \mathbf{MY}|$ не существует протоминимальной метрики.

Задача 11. Докажите, что метрика Леви L является регулярной.

Задача 12. Пусть X_1, X_2, \dots и Y_1, Y_2, \dots – последовательности независимых случайных величин и N – целочисленная случайная величина, независимая от случайных величин обеих последовательностей. Тогда для любого $s = m + \alpha \geq 0$ (m – целое и $0 < \alpha \leq 1$),

$$\zeta_s \left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{i=1}^N Y_i \right) \leq \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(N \geq k) \zeta_s(X_k, Y_k).$$

Задача 13. Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots независимы и одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а Y – стандартная нормальная случайная величина. Положим $S_n = n^{-1/2}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$. Для идеальной метрики μ третьей степени имеет место *центральная предельная теорема*:

$$\mu(S_n, Y) \leq \mu(X_1, Y) n^{-1/2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Задача 14. Пусть X_1, X_2, \dots – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Полагаем $U_0 = 0$, $U_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, $Y_k = \max\{U_k; k = 0, 1, \dots, n\}$, $Y = \sup\{U_k; k = 0, 1, \dots\}$. В теории случайных блужданий доказывается, что с вероятностью 1

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \dots; \quad Y_n \rightarrow Y, \quad n \rightarrow \infty; \quad \theta = \min\{n: Y_n = Y, n = 1, 2, \dots\} < \infty.$$

Докажите, что для каждого $n \geq 1$ имеют место следующие оценки и равенства:

$$\rho(Y_n, Y) \leq \sigma(Y_n, Y) \leq i(Y_n, Y) = \mathbf{P}(\theta > n), \quad \pi(Y_n, Y) \leq K(Y_n, Y) \leq \mathbf{P}(\theta > n).$$

Вопросы к зачету

1. Дайте определение вероятностной метрики
2. Дайте определение простой вероятностной метрики
3. Дайте определение сложной вероятностной метрики
4. Дайте определение минимальной вероятностной метрики
5. Дайте определение протоминимальной вероятностной метрики
6. Дайте определение минимальной регулярной вероятностной метрики
7. Дайте определение однородной вероятностной метрики степени s

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

а) Основная литература

1. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 415 с. (3 экз.)
2. Калашников В. В., Рачев С. Т. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. — М.: Наука, 1988. — 311 с. (2 экз.)

б) Дополнительная литература

Вопросы математической теории надежности / Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

архивы математических журналов на сайте mathnet.ru

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;
 - материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование;
 - лицензионное программное обеспечение: *Windows, Microsoft Office*;
 - обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.
- ресурсам.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, Положением о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 № 2122), Федеральными государственными требованиями к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре) (Приказ Минобрнауки РФ от 20.10.2021 № 951).

Авторы:

Автор: Зорин Андрей Владимирович, профессор кафедры теории вероятностей и анализа данных

Рецензент(ы) _____

Заведующий кафедрой _____

Программа одобрена на заседании Методической комиссии Института /факультета от _____ 2022 года, протокол № ____.