

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики  
*(факультет / институт / филиал)*

---

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
от 14.12.2021 г. протокол № 4

**Рабочая программа дисциплины**

Качественные методы нелинейной динамики  
*(наименование дисциплины (модуля))*

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат  
*(бакалавриат / магистратура / специалитет)*

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.02 Прикладная математика и информатика  
*(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)*

---

Направленность образовательной программы  
Математическое моделирование и вычислительная математика  
*(указывается профиль / магистерская программа / специализация)*

---

Форма обучения  
Очная  
*(очная / очно-заочная / заочная)*

---

Нижегород

2022 год



## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины Б1.В.ДВ.05.05.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.05.05» Качественные методы нелинейной динамики-1» относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-6. Способен изучать и применять программное обеспечение, проводить расчётные работы и выполнять обработку результатов исследований	ПК-6.1. Знает методы применения современных программных комплексов, пакетов прикладных программ и автоматизированных систем для решения прикладных задач при проведении исследований	Знает: основные термины, понятия и методы нелинейной динамики, применяемые для анализа и исследования поведения конкретных динамических объектов, основные бифуркации нелинейных динамических систем и механизмы перехода к хаотическим режимам, приемы исследования динамики нелинейных систем второго порядка.	Собеседование
	ПК-6.2. Умеет самостоятельно проводить расчётные работы, выбирать и применять современные программные комплексы, пакеты прикладных программ и автоматизированные системы, обрабатывать и анализировать полученные результаты	Умеет: использовать методы и приемы нелинейной динамики при решении конкретных задач динамики систем, планировать вычислительный эксперимент на ЭВМ.	Задача (практическое задание) Контрольная работа
	ПК-6.3. Имеет практический опыт применения современного программного обеспечения для решения прикладных задач	Владеет основными методами и представлениями нелинейной динамики и технологией вычислительного эксперимента при проведении исследований динамики конкретных объектов и систем.	Задача (практическое задание) Контрольная работа

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>Очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>5 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	<b>50</b>
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	32
- занятия лабораторного типа	0
- текущий контроль (КСР)	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>94</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Введение. Математическое моделирование в исследовании нелинейной динамики.	22	1	2		3	19
Тема 2. Основные понятия нелинейной динамики. Устойчивость состояний равновесия и периодических движений.	42	6	10		16	26
Тема 3. Бифуркации, качественные методы и приемы исследования нелинейных динамических систем.	41	6	10		16	25
Тема 4. Компьютерное моделирование в исследовании нелинейных динамических систем.	37	3	10		13	24
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен	36					
Итого	180	16	32		50	94

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Наполнение объема часов самостоятельной работы обучающихся предусмотрено в виде обработки и осмысления информации, полученной в ходе лекционных занятий, подготовки к практическим занятиям, а также в виде выполнения заданий для индивидуальной и самостоятельной работы, подготовки к контрольной работе и к экзамену. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Текущий контроль самостоятельной работы осуществляется в виде оценки успешности выполнения этих заданий.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

**5.Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю),**  
включающий:

**5.1.Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине**

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

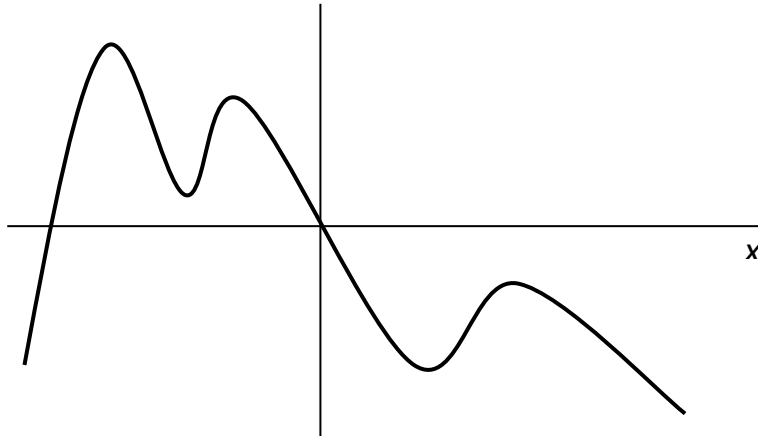
Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Понятие устойчивости движения. Анализ локальной устойчивости состояний равновесия динамических систем. Теорема Гробмана-Хартмана.	ПК-6
2. Исследование устойчивости состояний равновесия с использованием метода функций Ляпунова.	ПК-6
3. Динамические системы первого порядка.	ПК-6
4. Типы состояний равновесия в двумерных динамических системах. Разбиение плоскости параметров характеристического уравнения по типу его корней.	ПК-6
5. Устойчивость периодических движений динамических систем второго порядка.	ПК-6
6. Метод точечных преобразований для исследования предельных циклов динамических систем второго порядка.	ПК-6
7. Устойчивость периодических движений многомерных динамических систем. Мультипликаторы периодических движений. Седловые предельные циклы.	ПК-6
8. Устойчивость неперiodических движений многомерных динамических систем. Показатели Ляпунова.	ПК-6
9. Бифуркации состояний равновесия автономных динамических систем второго порядка: седло-узловая бифуркация, бифуркация рождения предельного цикла (бифуркация Андронова-Хопфа).	ПК-6
10. «Безопасные» и «опасные» границы области устойчивости состояния равновесия.	ПК-6
11. Бифуркации автономных динамических систем второго порядка: сепаратрисные связки и петли сепаратрис.	ПК-6

12. Бифуркация двойного предельного цикла в автономных динамических системах второго порядка.	ПК-6
13. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла в автономных динамических системах второго порядка.	ПК-6
14. Применение метода точечных преобразований для анализа бифуркации двойного предельного цикла в автономных динамических системах второго порядка.	ПК-6
15. Анализ устойчивости периодических движений многомерных динамических систем (на примере системы с трехмерным фазовым пространством).	ПК-6
16. Применение метода точечных отображений для исследования устойчивости периодических движений в многомерных динамических системах.	ПК-6
17. Устойчивость неподвижной точки отображения Пуанкаре, типы бифуркаций неподвижной точки при переходе через границы области устойчивости.	ПК-6
18. Седло-узловая бифуркация периодических движений многомерных динамических систем.	ПК-6
19. Переход к хаотическому поведению в многомерных динамических системах через перемежаемость I типа.	ПК-6
20. Суперкритическая бифуркация удвоения периода предельного цикла в многомерных динамических системах.	ПК-6
21. Переход к хаотическому поведению в многомерных динамических системах через последовательность бифуркаций удвоения периода.	ПК-6
22. Субкритическая бифуркация удвоения периода предельного цикла в многомерных динамических системах. Переход к хаотическому поведению через перемежаемость III типа	ПК-6
23. Бифуркация рождения двумерного тора в многомерных динамических системах. Резонансные предельные циклы и квазипериодические движения. Физическая интерпретация возникающих режимов.	ПК-6
24. Субкритическая бифуркация двумерного тора в многомерных динамических системах. Переход к хаотическому поведению через перемежаемость II типа.	ПК-6
25. Нелокальные бифуркации многомерных динамических систем: бифуркация петли сепаратрисы седло-узла, бифуркация петли сепаратрисы седло-фокуса.	ПК-6
26. Сценарии перехода к хаотическому поведению: каскад бифуркаций удвоения периода, разрушение двумерного тора, перемежаемость.	ПК-6
27. Приемы исследования динамических систем второго порядка: критерий отсутствия предельных циклов, циклы без контакта, поворот векторного поля	ПК-6
28. Метод малого параметра (метод Понтрягина) исследования предельных циклов в системах, близких к нелинейным консервативным системам.	ПК-6
29. Нелинейный осциллятор: построение фазового портрета консервативного нелинейного осциллятора, период колебаний, неизохронность.	ПК-6
30. Одномерные отображения (неподвижные точки и их устойчивость, бифуркации).	ПК-6
31. Логистическое отображение.	ПК-6

## 5.2.2 Контрольная работа для оценки компетенции «ПК-6»

### Вариант 1

Задание 1. Построить фазовый портрет нелинейного осциллятора с потенциалом  $V(x)$  вида



Задание 2. Для системы

$$dx/dt = y,$$

$$dy/dt = -(1 - rs)x - (r - s)y$$

построить на плоскости  $(r, s)$  области, соответствующие различным типам состояний равновесия.

Задание 3. Динамическая система

$$dx/dt = y,$$

$$dy/dt = \gamma - \lambda y - \sin x$$

при некоторых значениях параметров  $\gamma$  и  $\lambda$  имеет предельный цикл. Определите характер устойчивости этого цикла.

Задание 4. При каких значениях параметров  $\rho$  и  $\mu$  динамическая система

$$dx/dt = \rho - \cos x,$$

$$dy/dt = 2\rho(\lambda - \sin x - \mu y)$$

не имеет предельных циклов.

## Вариант 2

Задание 1. Найти состояния равновесия системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = \sin y$$

и определить характер состояний равновесия.

Задание 2. Динамическая система

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = \gamma - (\lambda + b \cos x)y - \sin x$$

имеет при некоторых значениях параметров  $\gamma, \lambda, b$  петлю сепаратрис седла. Каков характер устойчивости предельного цикла, который может родиться от этой петли?



Задание 3. Построить фазовый портрет нелинейного осциллятора с потенциалом  $V(x)$  вида



Задание 4. При каких значениях параметров  $\rho$  и  $\mu$  динамическая система

$$dx/dt = \rho - \sin x,$$

$$dy/dt = 4\rho(\lambda - 2\cos x - \mu y)$$

не имеет предельных циклов.

используя функцию  $V(x) = (bx^2 + ay^2)/2$ .

#### 5.2.3 Вопросы для собеседования для оценки компетенции «ПК-6»

1. Определение динамической системы.
2. Понятие состояния и пространства состояний динамических систем.
3. Понятие эволюционного оператора и фазовой траектории.
4. Основные классы динамических систем.
5. Понятие аттрактора динамической системы.
6. Дайте определение области притяжения аттрактора.
7. Типы аттракторов двумерных динамических систем.
8. Понятие бифуркации динамических систем.
9. Понятие устойчивости движения. Определение устойчивости по Ляпунову. Понятие асимптотической устойчивости, орбитной устойчивости, устойчивости по Пуассону.
10. Как проводится локальный анализ устойчивости состояний равновесия?
11. Теорема Гробана-Хартмана. Понятие топологической эквивалентности динамических систем.
12. Теорема Ляпунова об устойчивости состояния равновесия по первому приближению. Устойчивость состояний равновесия «в большом» и «в целом».
13. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица.
14. Исследование устойчивости состояний равновесия с использованием метода функций Ляпунова.
15. Типы состояний равновесия в динамических системах второго порядка. Диаграмма разбиения плоскости корней характеристического уравнения на области с различным типом состояний равновесия в динамических системах второго порядка.

16. Дайте определение характеристического показателя предельного цикла в динамических системах второго порядка и сформулируйте условие устойчивости предельного цикла.
17. Метод точечных преобразований для исследования предельных циклов двумерных динамических систем.
18. Теорема Кенигса об устойчивости неподвижной точки точечного преобразования отрезка без контакта в себя. Диаграмма Ламерея.
19. Условие устойчивости предельного цикла в многомерных динамических системах.
20. Дайте определение ляпуновского характеристического показателя.
21. Понятие грубости динамических систем. Негрубые траектории в динамических системах второго порядка. Перечислите простейшие бифуркации в динамических системах второго порядка.
22. Охарактеризуйте бифуркацию седло-узловое состояние равновесия предельного цикла динамических систем второго порядка.
23. Опишите бифуркацию Андронова-Хопфа. Понятия «безопасной» и «опасной» области устойчивости состояния равновесия.
24. Опишите бифуркацию петли сепаратрисы в динамических системах второго порядка.
25. Опишите бифуркацию двойного предельного цикла в динамических системах второго порядка.
26. Поясните метод исследования устойчивости периодических движений в многомерных динамических системах на примере трехмерной динамической системы.
27. Объясните понятия матрицы монодромии и мультипликатора предельного цикла.
28. Теорема об устойчивости периодического движения в многомерных динамических системах.
29. Понятие отображения Пуанкаре секущей поверхности в себя. Кратные неподвижные точки отображения Пуанкаре. Устойчивость неподвижной точки отображения Пуанкаре.
30. Типы бифуркаций неподвижных точек отображения Пуанкаре и соответствующих им предельных циклов.
31. Изобразите область устойчивости неподвижной точки отображения Пуанкаре на плоскости  $(C, J)$  коэффициентов характеристического уравнения  $\rho^2 - C\rho + J = 0$  и поясните характер бифуркаций при переходе через границы области устойчивости.
32. Опишите седло-узловую бифуркацию предельного цикла.
33. Опишите бифуркацию удвоения периода предельного цикла.
34. Опишите бифуркацию рождения двумерного тора из предельного цикла.
35. Опишите бифуркацию потери симметрии.
36. Изобразите зависимость фазовой переменной от времени для двухчастотного колебательного движения. Когда оно будет периодическим, и когда – квазипериодическим?
37. Поясните механизм перехода к хаосу через перемежаемость.
38. Поясните механизм перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода.
39. Поясните механизм возникновения хаоса через разрушение двумерного тора.

40. Опишите приемы качественного исследования нелинейных динамических систем второго порядка (критерий Бендиксона–Дюлака, метод циклов без контакта, поворот векторного поля).

41. Опишите алгоритм построения фазового портрета консервативных динамических систем второго порядка.

42. Опишите бифуркации одномерных отображений.

#### 5.2.4 Пример задач, выносимых на экзамен

**Задачи 1.** Построить фазовые портреты систем:

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - ax^2 - 2a^2x, \quad a > 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = x^4 + 2x^2 + 1 - b,$$

$$\frac{dx}{dt} = ax^3 - bx, \quad a > 0$$

в зависимости от параметров  $a$  и  $b$ .

**Задача 2.** Исследовать число и устойчивость состояний равновесия динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = -(x^3 - \alpha x + \mu)$$

**Задача 3.** Найти состояния равновесия и проанализировать их устойчивость в зависимости от параметров  $m$  и  $g$  в системе

$$\frac{dx}{dt} = mx + y - xz, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -gz + gx$$

**Задача 4.** Исследовать устойчивость нулевого положения равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = ay + mx^3 + x^5, \quad \frac{dy}{dt} = -bx + ny^3, \quad \text{где } a, b, m, n > 0,$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976 г. (62 экз)
2. Некоркин В.И. Лекции по основам теории колебаний. Н. Новгород, ННГУ, 2012. (152 экз)

б) дополнительная литература:

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М. 1981. – 567 с. (37 экз).
2. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1976. -336 с. (37 экз)

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в

электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор \_\_\_\_\_ Никифорова И.В.

Рецензент \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой ПМ \_\_\_\_\_ Иванченко М.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 01.12.2021 года, протокол № 2.