

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол от

«16» января 2024 г. № 1

Рабочая программа дисциплины

Прикладной тензорный анализ

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2023 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.
Код дисциплины Б1.В.ДВ.02.02.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.02.02 «Прикладной тензорный анализ» относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», формируемой участниками образовательных отношений.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-13 <i>Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике</i>	ПК-13.1. Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике	Знает основные понятия тензорного исчисления, технологию доказательства утверждений и преобразования выражений.	<i>Собеседование, задачи</i>
	ПК-13.3. Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности	Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач тензорного исчисления.	<i>Контрольная работа, задачи</i>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	2 з.е.
Часов по учебному плану	72

в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- занятия лабораторного типа	
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	7
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Очная форма обучения							
№	Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				СР ¹ , часы
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				
			из них				
			ЗЛеТ ²	ЗСеТ ³	ЗЛаТ ⁴	Всего	
1.	Введение	3	2			2	1
2.	Тензорная алгебра	21	8	12		20	1
3.	Дифференциальное исчисление	19	8	10		18	1
4.	Интегральное исчисление	17	8	8		16	1
5.	Приложения	5	2	2		4	1
6.	Тензорные функции	3	2			2	1
7.	Обзор курса	3	2			2	1
	Текущий контроль (КСР)	1				1	
	ИТОГО	72	32	32	0	65	7
¹ Самостоятельная работа обучающегося. ² Занятия лекционного типа. ³ Занятия семинарского типа. ⁴ Занятия лабораторного типа.							

Краткое содержание разделов и тем дисциплины

1. Введение. Математическое моделирование. Евклидово ориентированное пространство. Системы координат. Инвариантность. Физические величины и их тензорные свойства. Скаляры, векторы, тензоры. Краткие исторические сведения.
2. Тензорная алгебра. Тензоры нулевого ранга – скаляры. Тензоры 1-го ранга – векторы (определение, полярные и аксиальные, сложение, умножение вектора на скаляр, линейное /векторное/ пространство, линейная зависимость векторов, базис и размерность векторного пространства, системы координат, скалярное, векторное, смешанное умножение векторов, координаты вектора, некоторые формулы векторной алгебры). Появление тензоров 2-го ранга (математическое, механическое: тензор инерции, тензор напряжений). Тензоры 2-го ранга (определения, алгебраические операции: транспонирование, сложение, умножения, двойные умножения, свойства и характеристики: след, векторный инвариант, определитель, единичный, обратный, взаимный, симметричный, антисимметричный, шаровой, девиатор, ортогональный, положительно определённый, собственные числа и собственные векторы, спектральное разложение, возведение в степень, теорема Гамильтона-Кэли, инварианты, тензорный базис, координаты тензора, преобразование координат, тензорный признак /теорема деления тензоров/, тензорная поверхность). Тензоры высших рангов (определения, тензор Леви-Чивиты, символы Леви-Чивиты, символы Риччи, изотропные, гиротропные).
3. Дифференциальное исчисление. Тензорное поле. Криволинейные системы координат. Радиус-вектор. Основной и взаимный базис. Набла-оператор Гамильтона. Градиент тензорного поля (скалярное, векторное, тензорное высшего ранга). Потенциальное поле. Линейный тензор деформации. Тензор спина. Вихрь векторного поля. Формула Гельмгольца. Вычисление

градиента. Дивергенция тензорного поля. Соленоидальное поле. Вычисление дивергенции. Ротор (вихрь) векторного поля. Вычисление ротора. Двукратное дифференцирование. Оператор Лапласа. Тензор несовместимости. Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля.

4. Интегральное исчисление. Формулы Стокса. Формулы Остроградского-Гаусса. Формулы Грина. Формулы Гаусса.
5. Приложения. Уравнения движения абсолютно твёрдого тела. Моделирование поведения сплошной среды.
6. Тензорные функции тензорного аргумента. Аналитические функции тензора 2-го ранга. Изотропные функции. Дифференцирование по тензорному аргументу. Производные от инвариантов тензора 2-го ранга.
7. Обзор курса. Подготовка к промежуточной аттестации.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий), контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к *зачёту*.

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		Знания	Умения	Навыки
плохо	не зачтено	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа
неудовлетворительно		Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
удовлетворительно	зачтено	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
хорошо		Уровень знаний в	Продемонстрированы	Продемонстрированы

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		Знания	Умения	Навыки
		объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.
очень хорошо		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
отлично		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
превосходно		Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
незачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

№	Вопрос	Код формируемой компетенции
1.	Полярные и аксиальные векторы.	ПК-13
2.	Линейная зависимость векторов.	ПК-13
3.	Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе.	ПК-13
4.	Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.	ПК-13
5.	Скалярное, векторное, тензорное произведение тензоров.	ПК-13
6.	Множественные произведения тензоров.	ПК-13
7.	Свойства и характеристики тензоров 2-го ранга.	ПК-13
8.	Тензорный базис. Координаты тензора в базисе.	ПК-13
9.	Градиент, дивергенция, ротор тензорного поля.	ПК-13
10.	Дифференцирование базисных векторов.	ПК-13
11.	Интегральные формулы.	ПК-13
12.	Аналитические функции тензора 2-го ранга.	ПК-13

5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-13

Пример контрольной работы

Вариант 1

Задание 1

Определение, свойства, физический смысл скалярного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}(\mathbf{a} \times \mathbf{P}^T \times \mathbf{b})$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha \mathbf{X} = \beta \mathbf{C}$.

Вариант 2

Задание 1

Определение, свойства, геометрический смысл векторного произведения векторов.

Задание 2

Преобразовать выражение $\text{tr}[(\mathbf{P}^T \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$.

Задание 3

Решить уравнение $(\text{tr} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha \mathbf{X}^T = \beta \mathbf{C}$.

Примеры задач

1. Вычислить \mathbf{E}_\times , $\text{tr} \mathbf{E}$, здесь \mathbf{E} – единичный (метрический) тензор.
2. Доказать тождество $\mathbf{E} \times \mathbf{a} = \mathbf{n} \mathbf{n} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{n} \mathbf{n}$, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ и $|\mathbf{n}| = 1$. (ЗК38)

3. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{Q} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}$. (ЗК67)
4. Найти главные значения и главные оси тензора $\mathbf{Q} = \mathbf{a}\mathbf{a}$. (ЗК79)
5. Найти собственные числа тензора $\mathbf{T} = \alpha(\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) + \alpha(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) + \alpha(\mathbf{ki} + \mathbf{ik})$. (ЗК80)
6. Найти спектральное разложение тензора $\mathbf{Q} = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{a}\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b}\mathbf{b} + \delta\mathbf{c}\mathbf{c}$, если векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} взаимно ортогональны. (ЗК83)
7. Вычислить $\nabla \mathbf{r}$, $\nabla \times \mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{r}$ здесь \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки 3D пространства.
8. Доказать $\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \times \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$
9. Доказать $\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}) = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q} + \nabla \cdot (\mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{a}$

5.2.3. Вопросы для собеседования для оценки компетенции «ПК-13»:

1. Физическое пространство.
2. Классификация физических величин.
3. Евклидово геометрическое пространство.
4. Векторное пространство.
5. Скалярное произведение векторов.
6. Векторное произведение векторов.
7. Смешанное произведение векторов.
8. Двойное векторное произведение векторов.
9. Линейная зависимость системы векторов.
10. Базис векторного пространства.
11. Координаты вектора в базисе (ковариантные и контравариантные координаты).
12. Действия с векторами в координатах.
13. Действия с векторами в декартовом ортонормированном базисе (декартовой прямоугольной системе координат)
14. Тензоры 0-ранга – скалярные величины.
15. Тензоры 1-ранга – векторные величины.
16. Полярные (истинные) и аксиальные (псевдовекторы) векторы.
17. Прямое декартово произведение.
18. Тензорное произведение векторных пространств.
19. Множество диад.
20. Тензоры 2-ранга и высших рангов.
21. Истинные и псевдовекторы тензоры.
22. Транспонирование (перестановка) векторов полиад.
23. Скалярное произведение тензоров.
24. Векторное произведение тензоров.
25. Тензорное произведение тензоров.
26. Двойные произведения тензоров.
27. Многократные произведения тензоров.
28. Линейное отображение векторного пространства. Линейная форма.
29. Билинейная форма. Квадратичная форма.
30. Полилинейная форма.
31. След тензора 2-ранга.
32. Векторный инвариант тензора 2-ранга, вектор, сопутствующий тензору 2-ранга.
33. Симметричный тензор 2-ранга.
34. Антисимметричный (кососимметричный) тензор 2-ранга.
35. Единичный (метрический) тензор 2-ранга.
36. Существование единичного тензора 2-ранга – диадное представление.
37. Доказательство единственности единичного тензора 2-ранга.

38. Шаровой тензор 2-ранга.
39. Девиатор.
40. Разложение симметричного тензора 2-ранга.
41. Разложение произвольного тензора 2-ранга.
42. Определитель (детерминант) тензора 2-ранга.
43. Обратный тензор 2-ранга.
44. Тензор алгебраических дополнений (взаимный тензор) 2-ранга.
45. Определитель суммы тензоров 2-ранга.
46. Ортогональный тензор 2-ранга.
47. Тензор поворота.
48. Теорема Эйлера.
49. Тензор инверсии.
50. Положительно определённый тензор 2-ранга.
51. Полярное разложение тензора 2-ранга.
52. Собственные числа (главные значения) и собственные векторы (главные оси, главные направления) тензора 2-ранга.
53. Характеристическое (определяющее, вековое) уравнение.
54. Равенство левых и правых собственных векторов.
55. Ортонормированность собственных векторов.
56. Главные инварианты тензора 2-ранга.
57. Спектральное разложение (канонический вид) тензора 2-ранга.
58. Возведение в степень тензора 2-ранга.
59. Теорема Гамильтона-Кэли.
60. Аналитические функции тензора 2-ранга.
61. Координаты тензора 2-ранга (ковариантные, контравариантные, смешанные координаты).
62. Координаты тензора произвольного ранга.
63. Тензор Леви-Чивиты, символы Леви-Чивиты, символы Риччи (символы перестановок).
64. Изотропные тензоры 4-ранга.
65. Тензорное поле.
66. Радиус-вектор и естественный базис евклидова пространства. Координатные линии и поверхности.
67. Набла-оператор Гамильтона.
68. Градиент тензорного поля.
69. Дивергенция тензорного поля.
70. Ротор (вихрь) тензорного поля.
71. Потенциальное векторное поле.
72. Соленоидальное векторное поле.
73. Безвихревое векторное поле.
74. Дифференцирование тензорных полей.
75. Двукратное дифференцирование тензорных полей.
76. Оператор Лапласа (лапласиан).
77. Тензор несовместимости.
78. Дифференцирование векторов естественного базиса. Символы Кристоффеля.
79. Интегрирование тензорных полей.
80. Формулы Стокса.
81. Формулы Остроградского-Гаусса.
82. Формулы Грина.
83. Формулы Гаусса.
84. Дифференцирование тензорных функций по тензорному аргументу.
85. Дифференцирование главных инвариантов тензора 2-ранга.

5.2.4. Примерные задания, выносимые на зачет

10. Доказать $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. (ЗК14)
11. Преобразовать $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. (ЗК8)
12. Преобразовать $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. (ЗК18)
13. Преобразовать $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

№	а) основная литература:	К-во ¹
1.	Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве: тензорная алгебра. Жидков А.В., Шабаров В.В. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с. (http://www.unn.ru/books/...).	Э
2.	Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И.Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с. (http://eqworld.ipmnet.ru/...). Приложения. Тензорная алгебра и тензорный анализ. с.422-495.	Э, 3 экз.
3.	Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А.Жилин. – СПб.: Нестор, 2001. – 276 с. (http://mp.ipme.ru/Zhilin/...).	Э
4.	Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа / В.А.Пальмов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 109 с. (http://www.fea.ru/...).	Э
5.	Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. / Дж.Мейз. – М.: Мир, 1974. – 319 с. (http://eqworld.ipmnet.ru/...).	Э

№	б) дополнительная литература:	К-во ¹
1.	Тензорная алгебра. Часть I / Сост. А.В.Баландин, О.А.Муляр, А.Г.Разуваев. – Н.Новгород: ННГУ, 2004. 14 с. (http://www.unn.ru/books/...).	Э
2.	Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Малышев А.И., Максимова Г.М. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 101 с. (http://www.unn.ru/books/...).	Э
3.	Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К.Трусделл. – М.: Наука, 1975. – 592 с. Приложение II (http://eqworld.ipmnet.ru/...).	Э

№	в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)	«Л» или «С» ²
1.	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm	С

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

¹ Указывается количество экземпляров в библиотеке ННГУ. Если издание доступно в электронном виде (указана ссылка), указывается буква «Э».

² Указывается буква «Л», если программное обеспечение – лицензионное, или «С» – в свободном доступе.

Автор: к.т.н., доцент кафедры ТКиЭМ Жидков А.В.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ТКиЭМ: д.ф.-м.н. Игумнов Л.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 13.12.2023 года, протокол № 3.