

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол № 10 от 02.12.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
Современный анализ и динамические системы

---

Уровень высшего образования  
Магистратура

---

Направление подготовки / специальность  
01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения  
очная

---

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.18 Современный анализ и динамические системы относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	<p>ПК-1.1: Знает математические и численные методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания</p> <p>ПК-1.2: Умеет строить логические последовательные цепочки рассуждений, формулировать промежуточные и окончательные результаты, находить эквивалентные формулировки математических утверждений, понимать полноту математического доказательства</p> <p>ПК-1.3: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований или производственной деятельности</p>	<p>ПК-1.1: Знать основные понятия дисциплины «Современный анализ и динамические системы», определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений</p> <p>ПК-1.2: Уметь исследовать основные типы состояний равновесия и периодических траекторий, находить основные величины, которые определяют типы и их изменения при вариации параметров системы, самостоятельно разбирать и осваивать новые разделы математики, необходимые в работе</p> <p>ПК-1.3: Владеть математическим аппаратом дифференциальных уравнений, дифференциальной топологии, анализа, методами решения задач и доказательств утверждений в этой области, численными алгоритмами и пакетами для численных</p>	<p>Собеседование</p> <p>Задания</p> <p>Контрольная работа</p>	<p>Экзамен:</p> <p>Контрольные вопросы</p>

		исследований.		
--	--	---------------	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>5</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>78</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Понятия анализа, связанные с отношением порядка. Вопросы теории дискретных динамических систем, связанные с отношением порядка. Примеры.	17	4	4	8	9
Тема 2. Эволюция теоремы А.Н. Шарковского: от непрерывных отображений отрезка к динамическим системам с многомерными фазовыми пространствами	17	4	4	8	9
3. Вопросы анализа многозначных функций. Примеры.	18	4	4	8	10
Тема 4. Динамические многозначные функции в теории косых произведений.	18	4	4	8	10
Тема 5. Описание неблуждающего множества некоторых косых произведений на многомерных клетках (случай простейших косых произведений).)	18	4	4	8	10
Тема 6. Понятие цепно-рекуррентной траектории. Сценарий цепно-рекуррентного С0- Омега-взрыва в гладких простейших косых произведениях.	18	4	4	8	10
Тема 7. Понятие локальной ламинации (слоения, ламинации). Основные	18	4	4	8	10

свойства.					
Тема 8. Вполне интегрируемые дискретные динамические системы. Критерии различия, примеры интегрируемых систем с аттракторами специального вида.	18	4	4	8	10
Аттестация	36				
КСР	2			2	
Итого	180	32	32	66	78

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Понятия анализа, связанные с отношением порядка. Вопросы теории дискретных динамических систем, связанные с отношением порядка. Примеры.
2. Эволюция теоремы А. Н. Шарковского: от непрерывных отображений отрезка к дискретным динамическим системам с многомерным фазовым пространством.
3. Вопросы анализа многозначных функций. Примеры.
4. Динамические многозначные функции в теории косых произведений.
5. Описание неблуждающего множества некоторых косых произведений на многомерных клетках (случай простейших косых произведений).
6. Понятие цепно-рекуррентной траектории. Сценарий цепно-рекуррентного  $C0$ -Омега-взрыва в гладких простейших косых произведениях
7. Понятие локальной ламинации (слоения, ламинации). Основные свойства.
8. Вполне интегрируемые дискретные динамические системы. Критерии различия, примеры интегрируемых систем с аттракторами специального вида.

Практические занятия /лабораторные работы организуются, в том числе, в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

На проведение практических занятий / лабораторных работ в форме практической подготовки отводится: очная форма обучения - 2 ч.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Современный анализ и динамические системы, <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=10753>.

Иные учебно-методические материалы:

см. раздел "Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)"

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

## 5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

### 5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-1:

1. Динамические системы на плоскости и двумерном многообразии. Геометрическая интерпретация, понятие векторного поля. Траектории, типы траекторий. Понятие динамической системы.
2. Устойчивость по Лагранжу, омега- и альфа-предельные точки траектории, омега- и альфа-предельные множества, их непустота и инвариантность. Теоремы об омега- и альфа-предельных множествах траекторий.
3. Состояния равновесия двумерных систем. Простые и сложные состояния равновесия, Типы простых состояний равновесия. Устойчивость по Ляпунову состояний равновесия.
4. Сложный фокус, проблема различения центра и фокуса, теорема Ляпунова о необходимом и достаточном условии центра в аналитической системе.
5. Периодические траектории, секущие, отображение Пуанкаре. Условия устойчивости и неустойчивости, показатель цикла. Простые и сложные периодические траектории.
6. Теорема Пуанкаре-Бендиксона для систем на плоскости.
7. Индекс Пуанкаре замкнутой кривой, индекс особой точки, вычисление индекса для простых состояний равновесия. Теорема о сумме индексов. Критерий Бендиксона отсутствия циклов.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответы на вопросы верны или содержат незначительные ошибки
не зачтено	Ответов нет или допущены грубые ошибки

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ПК-1:

1. Динамические системы на плоскости и двумерном многообразии. Геометрическая интерпретация, понятие векторного поля. Траектории, типы траекторий. Понятие динамической системы.
2. Грубые векторные поля на двумерных многообразиях. Теорема Майера о грубости диффеоморфизма окружности. Понятие о схеме динамической системы.
3. Показать, что в логистическом отображении

$$X_1 = \alpha X(1-X)$$

при  $\alpha = 3$  происходит бифуркация удвоения.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задания решены верно или допущены незначительные ошибки

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Задания не решены или допущены грубые ошибки

### 5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-1:

1. Периодические траектории, секущие, отображение Пуанкаре. Условия устойчивости и неустойчивости, показатель цикла. Простые и сложные периодические траектории.
2. Теорема Пуанкаре-Бендиксона для систем на плоскости.
3. Показать, что начало координат системы  

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - \alpha xz, \dot{z} = -z - \alpha x^2,$$
асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $\alpha \leq 0$  и неустойчиво при  $\alpha > 0$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Контрольная работа решена без ошибок или с незначительными ошибками
не зачтено	Контрольная работа не решена или допущены грубые ошибки

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений.	При решении стандартных задач не	Продемонстрированы основные	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все основные

	Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

**5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:**

### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-1

1. Типы состояний равновесия и периодических траекторий в $\mathbb{R}^3$ , неподвижные точки отображение Пуанкаре для периодической траектории.
2. Теорема об устойчивом многообразии в случае потоков и диффеоморфизмов.
3. Теорема о центральном многообразии в случае потоков и диффеоморфизмов.
4. Локальные бифуркации потоков в окрестности негиперболических состояний равновесия (случай седло-узла, седло-седло, сложный седло-фокус).
5. Локальные бифуркации потоков в окрестности негиперболических состояний равновесия (случай седло-седла)
6. Локальные бифуркации потоков в окрестности негиперболических состояний равновесия (случай сложного седло-фокуса)
7. Некоторые локальные бифуркации <u>к размерности 2</u> для состояний равновесия в $\mathbb{R}^3$ .
8. Бифуркации в окрестности петли <u>сепаратрисы</u> седло-узла, рождение устойчивого (неустойчивого) цикла из петли.
9. Бифуркация петли <u>сепаратрисы</u> седла и седло-фокуса, случай отрицательной седловой величины.
10. Бифуркация петли <u>сепаратрисы</u> седла, случай положительной седловой величины.
11. Рождение седлового цикла и гиперболического множества при бифуркации петель <u>сепаратрисы</u> седло-седла.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающ ем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующ ем программе подготовки, без ошибок.
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующ ем программе подготовки. Допущено несколько несущественн ых ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующ ем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки.
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минималь- ных требований. Имели место грубые



Оценка	Критерии оценивания
	ошибки.
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Качественная теория динамических систем второго порядка. - М. : Наука, 1966. - 568 с. : черт. - 2.56., 69 экз.
2. Коток Анатолий Борисович. Введение в теорию динамических систем : с обзором последних достижений : пер. с англ. / под ред. А. С. Городецкого. - М. : Изд-во МЦНМО, 2005. - 464 с. - ISBN 5-94057-063-1 : 79.00., 3 экз.
3. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику / пер. с англ. А. Б. Катка ; под ред. В. М. Алексеева. - М. : Мир, 1975. - 304 с. : черт. - 1.35., 1 экз.

Дополнительная литература:

1. Хартман Филип. Обыкновенные дифференциальные уравнения / пер. с англ. И. Х. Сабитова и Ю. В. Егорова ; под ред. В. М. Алексеева. - М. : Мир, 1970. - 720 с. : черт. - 3.21., 3 экз.
2. Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. ; Л. : Гос. изд-во, 1949. - 550 с. - 27.00., 1 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Ефремова Людмила Сергеевна, доктор физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Сакбаев Всеволод Жанович.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.