

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Алгебра

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

---

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.3 Алгебра относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знает базовые типы алгебраических объектов, основные методы линейной алгебры, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры  УК-1.2: Умеет сводить алгебраические задачи к подсчету объектов базовых типов, выполнять преобразования в различных задачах линейной алгебры, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры  УК-1.3: Владеет опытом использования основных методов линейной алгебры, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры	Тест	Экзамен: Задачи
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2: Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор	ОПК-1.1: Знает основные понятия и результаты линейной алгебры, высшей алгебры, элементов абстрактной алгебры  ОПК-1.2: Знает основные понятия и результаты линейной алгебры, высшей алгебры,	Тест	Экзамен: Контрольные вопросы Задачи

методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний ОПК-1.3: Имеет практический опыт применения фундаментальных знаний, полученных в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности	элементов абстрактной алгебры  ОПК-1.3: Имеет практический опыт использования аппарата алгебры при решении практических задач		
---	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>9</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>324</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>128</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>0</b>
- КСР	<b>6</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>82</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>108</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Целые числа.	8	6		6	2
Комплексные числа.	8	6		6	2
Группы, кольца, поля.	7	5		5	2

Кольцо многочленов над заданным кольцом (полем).	8	6		6	2
Кольцо матриц над заданным кольцом (полем).	11	7		7	4
Векторная алгебра.	10	4		4	6
Линейное (векторное) пространство над полем.	7	6		6	1
Теория систем линейных уравнений.	5	4		4	1
Суммы подпространств.	3	2		2	1
Изменение координат вектора при замене базиса.	3	2		2	1
Линейные многообразия 2 и 3 порядка	8	5		5	3
Определитель (детерминант) матрицы и его свойства.	10	6		6	4
Линейные отображения	9	6		6	3
Линейные преобразования	12	8		8	4
Билинейные и полуторалинейные функции	15	11		11	4
Евклидовы и унитарные пространства.	16	12		12	4
Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств.	16	8		8	8
Квадратичные формы	16	8		8	8
Группы.	16	8		8	8
Кольца	14	6		6	8
Поля	8	2		2	6
Аттестация	108				
КСР	6			6	
Итого	324	128	0	134	82

### Содержание разделов и тем дисциплины

1 семестр. Целые числа. Делимость. НОД. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов. Арифметика вычетов. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы. Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней. Группы, кольца, поля. Понятие алгебраической операции. Полугруппа, группа. Симметрическая группа (группа подстановок), группа вычетов по заданному модулю. Кольцо. Поле. Характеристика поля. Примеры числовых колец и полей. Кольцо вычетов. Теорема: кольцо вычетов по модулю  $p$  является полем тогда и только тогда, когда  $p$  – простое. Понятие изоморфизма алгебраических систем. Кольцо многочленов над заданным кольцом (полем). Делимость в кольце многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые. Производная многочлена. Выделение кратных множителей. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел (с доказательством). Формулы Виета. Интерполяционный многочлен. Теорема Штурма. Неприводимые многочлены над  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$ . Признак Эйзенштейна неприводимости над  $\mathbb{Z}$ . Алгоритм Шуберта–Кронекера разложения многочлена на неприводимые множители над  $\mathbb{Z}$ . Кольцо матриц над заданным кольцом (полем). Операции с матрицами. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса их решения. Его трудоемкость.

Матричная интерпретация метода Гаусса. LU-разложение. Эквивалентные матрицы. Скелетное разложение. Обратная матрица. Векторная алгебра. Векторы на плоскости и в пространстве. Операции с векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат. Деление отрезка в заданном отношении. Центр тяжести системы материальных точек. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения в прямоугольной и произвольной аффинной системе координат. Векторное произведение. Его свойства, выражение через координаты. Смешанное произведение. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл. Линейное (векторное) пространство над полем. Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем  $F$ , пространство матриц над полем  $F$ , пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Изоморфизм линейных пространств. Понятие об аффинном пространстве. Линейное многообразие. Теория систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Два способа задания линейного подпространства, фундаментальная система решений системы линейных уравнений. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия. Суммы подпространств, базис и размерность суммы. Прямая сумма. Изменение координат вектора при замене базиса и при аффинном преобразовании.

2 семестр. Линейные многообразия 2 и 3 порядка. Прямые и плоскости. Различные виды задания прямых и плоскостей, геометрический смысл коэффициентов. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Задачи на нахождение расстояний и углов между прямыми и плоскостями. Определитель (детерминант) матрицы и его свойства. Теорема Лапласа. Три точки зрения на определители. Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Теорема об умножении определителей. Формула Бине–Коши. Линейные отображения (операторы), действия с ними, их матрицы. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов. Эквивалентные матрицы. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения. Линейные преобразования векторного пространства, подобие матриц. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный аннулирующий многочлен преобразования (матрицы). Жорданова форма линейного преобразования (матрицы). Функции от линейных преобразований (от матриц). Билинейные и полуторалинейные функции (формы) и их матрицы. Квадратичные функции. Изменение матрицы билинейной и полуторалинейной функции при изменении базиса. Конгруэнтные матрицы. Симметричные и эрмитовы функции. Теорема Лагранжа и Якоби о приведении симметричной и эрмитовой билинейной функции к каноническому виду. Разложение Холецкого. Закон инерции. Критерий Сильвестра положительной определенности. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Неравенство треугольника. Теорема Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Запись скалярного произведения через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR-разложение матрицы. Изоморфизм унитарных пространств. Нахождение псевдорешения несовместных систем линейных уравнений (метод наименьших квадратов). Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара.

3 семестр. Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств. Связь линейных преобразований и билинейных функций в унитарном пространстве. Сопряженное преобразование, свойства операции сопряжения. Нормальное преобразование унитарного пространства, существование у него базиса из собственных векторов. Комплексификация евклидова пространства. Теорема Шура. Теорема о нормальном преобразовании евклидова пространства. Унитарные и ортогональные преобразования. Сопряженные и симметричные преобразования. Неотрицательное самосопряженное

преобразование, извлечение квадратного корня из него. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к главным осям и спектральное разложение симметрических матриц. Одновременное приведение пары квадратичных форм к каноническому виду. Полярное и сингулярное разложения матриц. Кривые и поверхности 2-го порядка. Эллипс, гипербола, парабола. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Поверхности 2-го порядка. Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Взаимное расположение прямой и поверхности 2-го порядка. Центр, асимптотические направления, диаметральные плоскости. Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Инварианты и полуинварианты. Группы. Теорема Кэли. Циклические группы и их подгруппы. Разбиение группы на смежные классы, теорема Лагранжа. Нормальный делитель. Фактор-группа. Гомоморфизм групп. Связь нормальных делителей с гомоморфизмами. Кольца. Идеалы в кольцах и их связь с гомоморфизмами. Поля. Конечные поля, число элементов в них.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:  
Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Золотых Н.Ю., Сидоров С.В. Алгебра и геометрия. Электронно-управляемый курс. 2017., <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=244>.

Иные учебно-методические материалы:

Основная литература:

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/58162>;
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2003. <https://e.lanbook.com/book/30198>;
3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. <https://e.lanbook.com/book/72575>.

Дополнительная литература:

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. <https://e.lanbook.com/book/2178>;
2. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. <https://e.lanbook.com/book/529>;
3. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. <https://e.lanbook.com/book/399>;
4. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006. <https://e.lanbook.com/reader/book/165/>

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции УК-1:**

1. Сколько инверсий содержит перестановка (3, 5, 2, 6, 1, 4)?
  - 1) 6
  - 2) 7
  - 3) 8
2. Могут ли векторы  $\mathbf{a}(1,2,1)$ ,  $\mathbf{b}(2,3,3)$ ,  $\mathbf{c}(3,7,1)$  служить базисом пространства  $R^3$ ?

**5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Тест) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:**

1. Являются ли следующие векторы линейно независимыми  $\mathbf{a}(1,1,1)$ ,  $\mathbf{b}(1,1,2)$ ,  $\mathbf{c}(1,2,3)$ ?
2. Какое из следующих утверждений верное:
  - 1) Система векторов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  линейно зависима тогда и только тогда, когда существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , такие, что  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ .
  - 2) Система векторов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  линейно независима тогда и только тогда, когда не существует чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , таких, что  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ .
  - 3) Система векторов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  линейно зависима тогда и только тогда, когда существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, такие, что  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ .

**Критерии оценивания (оценочное средство - Тест)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	51-100 % от общего числа вопросов
не зачтено	0-50% от общего числа вопросов

**5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации**

**Шкала оценивания сформированности компетенций**

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				

ения компет							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».



	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. При каких значениях параметра вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  принадлежит линейной оболочке векторов  $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Линейное преобразование задано своей матрицей  $\begin{pmatrix} 6 & 12 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Найти все собственные числа. Для каждого из них указать его алгебраическую и геометрическую кратности.

Выяснить, диагонализируемо ли преобразование

а) в вещественном пространстве; б) в комплексном пространстве.

Если да, то записать матрицу перехода к базису из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
отлично	Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.
очень хорошо	Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами
хорошо	Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами

Оценка	Критерии оценивания
удовлетворительно	Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме
неудовлетворительно	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие минимальных умений решения задач. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа

### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1 семестр

1. Целые числа. Делимость. НОД. Алгоритм Евклида. Линейное разложение НОД.
2. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики.
3. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов (сравнений). Арифметика вычетов.
4. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы
5. Группы, кольца, поля. Понятие алгебраической операции. Полугруппа, группа. Симметрическая группа (группа подстановок), группа вычетов по заданному модулю.
6. Кольцо. Поле. Примеры числовых колец и полей. Кольцо вычетов. Теорема: кольцо вычетов по модулю  $n$  является полем тогда и только тогда, когда  $n$  – простое. Понятие изоморфизма алгебраических систем.
7. Кольцо многочленов над заданным кольцом (полем). Делимость в кольце многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены.
8. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые. Производная многочлена. Выделение кратных множителей.
9. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел. Формулы Виета.
10. Интерполяционный многочлен.
11. Теорема Штурма.
12. Неприводимые многочлены над кольцом целых и полем рациональных чисел. Признак Эйзенштейна неприводимости. Алгоритм Шуберта–Кронекера разложения многочлена на неприводимые множители.
13. Кольцо матриц над заданным кольцом (полем).

14. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса их решения, его трудоемкость, оценка числа операций. Матричная интерпретация метода Гаусса. LU-разложение. Эквивалентные матрицы.
15. Обратная матрица.
16. Линейное (векторное) пространство над полем. Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем  $F$ , пространство матриц над полем  $F$ , пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом.
17. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене.
18. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства.
19. Координаты вектора в базисе. Изоморфизм линейных пространств.
20. Теория систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия.
21. Два способа задания линейного подпространства, фундаментальная система решений системы линейных уравнений.
22. Обратная матрица.
23. Векторы на плоскости и в пространстве. Операции с векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат.
24. Деление отрезка в заданном отношении.
25. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат.
26. Скалярное произведение геометрических векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения в прямоугольной и произвольной аффинной системе координат.
27. Векторное произведение. Его свойства, выражение через координаты.
28. Смешанное произведение.
29. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл.
30. Суммы подпространств, базис и размерность суммы. Прямая сумма.
31. Изменение координат вектора при замене базиса и при аффинном преобразовании.

## 2 семестр

1. Различные виды задания прямых и плоскостей, геометрический смысл коэффициентов.
2. Взаимное расположение прямых и плоскостей.

3. Нахождение расстояний и углов между прямыми и плоскостями.
4. Определитель (детерминант) матрицы и его свойства.
5. Теорема Лапласа. Три точки зрения на определители.
6. Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.
7. Формула Бине–Коши.
8. Линейные отображения (операторы), действия с ними, их матрицы.
9. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов. Эквивалентные матрицы.
10. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения.
11. Линейные преобразования векторного пространства, подобие матриц. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа.
12. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы.
13. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог. Теорема Гамильтона–Кэли.
14. Минимальный аннулирующий многочлен преобразования (матрицы).
15. Жорданова форма линейного преобразования (матрицы).
16. Функции от линейных преобразований (от матриц).
17. Билинейные (полуторалинейные) и квадратичные функции (формы) и их матрицы. Изменение матрицы квадратичной (полуторалинейной) функции при изменении базиса.
18. Теорема Лагранжа и Якоби о приведении симметричной (эрмитовой) билинейной формы к каноническому виду. Разложение Холецкого. 19. Закон инерции.
20. Критерий Сильвестра положительной определенности, связь со скалярным произведением.
21. Евклидово (унитарное) пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.
22. Неравенство треугольника.
23. Теорема Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов.
24. Запись скалярного произведения через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах.
25. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR-разложение матрицы.
26. Изоморфизм унитарных пространств.

27. Нахождение псевдорешения несовместных систем линейных уравнений (метод наименьших квадратов).

28. Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара.

3 семестр

1. Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств. Связь линейных преобразований и билинейных функций в унитарном пространстве. Сопряженное преобразование, свойства операции сопряжения.

2. Нормальное преобразование унитарного пространства, существование у него базиса из собственных векторов.

3. Комплексификация евклидова пространства. Теорема о нормальном преобразовании евклидова пространства.

4. Унитарные и ортогональные преобразования.

5. Сопряженные и симметричные преобразования.

6. Неотрицательное самосопряженное преобразование, извлечение квадратного корня из него.

7. Приведение квадратичной формы к главным осям.

8. Одновременное приведение пары квадратичных форм к каноническому виду.

9. Полярное и сингулярное разложения матриц.

10. Кривые и поверхности 2-го порядка. Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка.

11. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Центр, асимптотические направления, диаметральные плоскости. 12. Взаимное расположение прямой и поверхности 2-го порядка.

13. Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Инварианты и полуинварианты.

14. Группы. Теорема Кэли.

15. Циклические группы и их подгруппы.

16. Разбиение группы на смежные классы, теорема Лагранжа.

17. Нормальный делитель. Фактор-группа. Гомоморфизм групп.

18. Связь нормальных делителей с гомоморфизмами.

19. Кольца. Идеалы в кольцах и их связь с гомоморфизмами.

20. Поля. Характеристика поля. Конечные поля, число элементов в них.

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	свободное владение основным и дополнительным материалом с незначительными ошибками и погрешностями
отлично	свободное владение основным материалом без ошибок и погрешностей
очень хорошо	достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями
хорошо	владение основным материалом с рядом заметных погрешностей
удовлетворительно	владение минимальным материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок
неудовлетворительно	владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка. Работа за время семестра можно оценить как неудовлетворительную
плохо	отсутствие владения материалом. Работа за время семестра была оценена на «плохо»

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Беклемишев Дмитрий Владимирович. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учеб. для студентов вузов. - Изд. 12-е, испр. - М. : Физматлит, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-0979-6 : 305.00., 19 экз.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / Курош А. Г. - 24-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 432 с. - Рекомендовано Министерством образования РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика». - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-46865-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=863501&idb=0>.
3. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие для вузов / Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.; Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю. - 10-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2023. - 496 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-507-48139-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=867154&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Ильин В. А. Линейная алгебра / Ильин В. А., Позняк Э. Г. - 6-е изд., стер. - Москва :

ФИЗМАТЛИТ, 2020. - 280 с. - Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов физических специальностей и специальности "Прикладная математика". - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0481-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=781680&idb=0>.

2. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И. В. - 16-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 476 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-9039-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=781523&idb=0>.

3. Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре / Фаддеев Д. К., Соминский И. С. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 288 с. - Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по математическим специальностям. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 978-5-8114-0427-8., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799585&idb=0>.

4. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре / Икрамов Х. Д., Воеводина В. В. - 2-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 320 с. - Книга из коллекции Лань - Математика. - ISBN 5-8114-0670-3., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=799567&idb=0>.

5. Задачи по алгебре : учебно-методическое пособие / А. Ю. Чирков, Л. Г. Киселева, С. И. Веселов [и др.] ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2015. - 80 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=850333&idb=0>.

6. Золотых Николай Юрьевич. Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств : задачник для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки "Приклад. математика и информатика", "Информ. технологии" / ННГУ. - Н. Новгород : [б. и.], 2010 (Тип. ННГУ). - 64 с. - 21.00., 50 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

не используется

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.