

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический факультет

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 6 от 31.05.2023 г.

Рабочая программа дисциплины

Теория групп

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность
03.04.02 - Физика

Направленность образовательной программы
профиль "Физика конденсированного состояния "

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2023 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Теория групп» относится к вариативной части Б1.В блока Б1 «Дисциплины (модули)», является обязательной для освоения, преподается на четвертом году обучения, в восьмом семестре. Освоению дисциплины предшествует освоение дисциплин (модулей) «Математика», «Кристаллография», «Квантовая механика».

Целями освоения дисциплины «Теория групп» являются:

1. освоение студентами основных понятий теории групп и основ теории представлений групп, являющихся эффективным и удобным средством решения широкого круга различных физических задач, связанных с теми или иными проявлениями симметрии;
2. выработка у студентов практических умений и навыков использования теоретико-групповых методов, применяемых в различных областях физики твердого тела, теории атомных спектров, квантовой механике и квантовой теории поля.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-1: Способен использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин	<i>Демонстрация способности использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин</i>	(ПК-1) Знать основные положения теории групп и теории представлений групп в приложении к профильным задачам физики; (ПК-1) Уметь формулировать и решать задачи в рамках профильных физических дисциплин, учитывающие симметричные свойства изучаемых моделей; (ПК-1) Владеть теоретико-групповыми методами в приложении к профильным физическим дисциплинам.	Индивидуальные собеседования, тест	Вопросы к экзамену

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	4

Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	54
- занятия лекционного типа	13
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	39
- КСР	2
самостоятельная работа	90
Промежуточная аттестация	36 экзамен

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа в течение семестра, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) в течение семестра, часы, из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Введение. Абстрактные группы. Определение группы. Теорема Лагранжа. Инвариантная подгруппа и фактор-группа. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Прямое произведение групп.	13	1	5	–	6	7
2. Точечные группы симметрии. Понятие точечной группы симметрии. Кристаллографические и некристаллографические точечные группы.	13	1	5	–	6	7
3. Симметрия кристаллов. Пространственные группы. Подгруппа трансляций. Сингонии. Кристаллические классы.	13	1	5	–	6	7
4. Приводимые и неприводимые представления групп. Леммы Шура. Характеры представлений. Соотношение ортогональности для характеров неприводимых представлений. Композиция представлений группы. Неприводимые представления прямого произведения групп. Разложение приводимого представления на неприводимые.	14	2	5	–	7	7
5. Пространственные группы и их неприводимые представления. Неприводимые представления группы трансляций. Звезда вектора k . Группа волнового вектора k .	14	2	5	–	7	7
6. Симметрия в квантовой механике.	14	2	5	–	7	7

Классификация уровней энергии. Теория возмущений. Общая формулировка правил отбора. Правила отбора для электрических дипольных переходов.						
7. Молекулярные колебания. Роль симметрии в классификации нормальных колебаний молекулы. Колебательное представление.	14	2	5	–	7	7
8. Непрерывные группы. Неприводимые представления группы трехмерных вращений. Непрерывные группы линейных преобразований. Структурные константы. Группа $O(2)$. Неприводимые представления группы $O^+(3)$.	11	2	4	–	6	5
В т.ч. текущий контроль	2	2				–
Промежуточная аттестация – экзамен						

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента – неотъемлемая часть подготовки высококвалифицированного специалиста в соответствующей области. Ее цель – формирование у студентов способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного и дополнительного материала, решение домашних контрольных работ с последующей проверкой навыков решения задач.

Проработка лекционного материала осуществляется еженедельно после проведения аудиторных занятий в рамках часов, отведенных студентам на самостоятельную работу. Кроме того, работа с лекционным и дополнительным материалом (рекомендованной литературой, приведенной в конце данной программы) проводится в период сессии при подготовке к экзамену по дисциплине.

Выполнение домашних работ осуществляется еженедельно или раз в две недели в соответствии с графиком изучения соответствующего лекционного материала и проведения практических занятий по соответствующей тематике.

Задачи для выполнения самостоятельных контрольных работ по каждому разделу дисциплины составляются преподавателем самостоятельно при ежегодном обновлении банка тестовых заданий. Количество вариантов зависит от числа обучающихся.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Экзамен	
Превосходно	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями. Исчерпывающее и логически строгое изложение всех разделов дисциплины. Владение материалом позволяет быстро справиться с видоизмененным заданием. Успешное решение любых типов практических заданий.
Отлично	Подготовка, уровень которой существенно выше среднего с некоторыми ошибками. Твердое знание всех разделов дисциплины. Допускаются неточности, нарушения в последовательности изложения материала. Владение необходимыми приемами и способами решения практических заданий.

Очень хорошо	Хорошая подготовка с рядом заметных недочетов. Твердое знание основных разделов дисциплины. Владение необходимыми приемами и способами решения основных типов практических заданий.
Хорошо	В целом, хорошая подготовка, но со значительными ошибками. Твердое знание основных разделов дисциплины. Владение необходимыми приемами и способами решения практических заданий.
Удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям. Знания основного содержания разделов дисциплины, допускаются грубые неточности, неправильные формулировки, нарушения в последовательности изложения материала. Имеющихся знаний достаточно для освоения дисциплин последующих курсов. Допускаются значительные ошибки при выполнении практических заданий.
Неудовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания. Незнание значительной части основного содержания разделов дисциплины. Имеющихся знаний недостаточно для освоения дисциплин последующих курсов.
Плохо	Подготовка совершенно недостаточная. Отсутствуют знания большей части основного содержания разделов дисциплины. Имеющихся знаний совершенно недостаточно для освоения дисциплин последующих курсов.

6.2. Процедуры и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

– индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии: практические контрольные задания. Типы практических контрольных заданий:

– выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

Критерии ответа студента на экзамене

Оценка «отлично» – Ответ полный и правильный, на основании изученной теории; материал изложен в определенной логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный и полностью выполнены индивидуальные практические задания.

Оценка «хорошо» – Ответ полный и правильный, на основании изученной теории; материал изложен в определенной логической последовательности при этом допущены две–три незначительные ошибки, исправленные по требованию преподавателя и правильно; полностью выполнены индивидуальные практические задания.

Оценка «удовлетворительно» – Ответ полный, но при этом допущена существенная ошибка или неполный, несвязный ответ и выполнены индивидуальные практические задания.

Оценка «неудовлетворительно» – Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не

могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя, не выполнены индивидуальные практические задания

6.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

6.3.1 Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

1. Введение. Абстрактные группы. Обзор точечных групп.

- 1.1. Найти все подгруппы группы C_{3v} . Какие из них являются инвариантными?
- 1.2. Пусть G – группа целых чисел по сложению, а N – множество целых чисел, делящихся на три. Доказать, что N является инвариантной подгруппой группы G и найти фактор-группу G/N .
- 1.3. Выяснить, каковы группы, у которых множество всех подгрупп
 - а) состоит из одной подгруппы,
 - б) состоит из двух подгрупп,
 - в) состоит из трех подгрупп.

2. Симметрия кристаллов. Пространственные группы.

Доказать, что подгруппа трансляций является инвариантной подгруппой пространственной группы симметрии кристаллического пространства.

3. Представления конечных групп.

- 3.1. Найти группу матриц, изоморфную группе C_{3h} .
- 3.2. Найти матрицы регулярного представления группы D_2 .
- 3.3. Могут ли матрицы $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ осуществлять представление групп C_{2h} ? C_4 ?
- 3.4. Для группы C_3 построить представление, используя базисные функции $\varphi_1 = x^2$, $\varphi_2 = y^2$, $\varphi_3 = xy$.
- 3.5. Используя соотношение ортогональности для характеров, построить таблицу характеров неприводимых представлений группы D_4 .
- 3.6. Найти матрицы представления группы C_{2v} ($C_2 \uparrow \uparrow OZ$) в базисе сферических функций с $l = 1$.

4. Неприводимые представления пространственных групп.

- 4.1. Для одноатомного кристалла с квадратной решеткой построить зону Бриллюэна и определить точечную группу симметрии.
- 4.2. То же для решетки графена (атомы углерода находятся в узлах гексагональной решетки).
- 4.3. Построить звезду вектора \mathbf{k} для квадратной решетки, если вектор \mathbf{k} : а) не связан с элементами симметрии зоны Бриллюэна, б) лежит на оси симметрии 2-го порядка. Рассмотреть случаи, когда волновой вектор находится внутри зоны Бриллюэна или оканчивается на ее границе.
- 4.4. Определить группу волнового вектора \mathbf{k} (см. 4.3) и соответствующие размерности неприводимых представлений.

5. Симметрия в квантовой механике.

- 5.1. На систему, обладающую симметрией группы O , наложено возмущение, понижающее ее симметрию до группы D_4 . Как расщепляются уровни, принадлежащие представлениям E и F_2 группы O ?
- 5.2. Как снимается вырождение первого вырожденного уровня трехкратного изотропного гармонического осциллятора под действием возмущения с симметрией C_{4v} ?
- 5.3. Вывести правила отбора для электрических дипольных переходов в системе с симметрией D_{2d} ?
- 5.4. То же для системы с симметрией C_{3v} .

6. Молекулярные колебания.

- 6.1. У молекулы фосфора атомы расположены в вершинах правильного тетраэдра. Дать классификацию нормальных мод.
- 6.2. То же для молекулы NH_3 (правильная пирамида с атомом N в вершине и атомами H в углах основания).

7. Непрерывные группы. Неприводимые представления группы трехмерных вращений.

- 7.1 Для группы одномерных проективных преобразований

$$x' = \frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + 1}$$

найти закон композиции, инфинитезимальные генераторы и структурные константы.

- 7.2 Для группы $O^+(3)$ найти разложение на неприводимые представления тензорных представлений 3-го и 4-го рангов.

Тест:

Задача 1.

Определить, является ли группой (по сложению и умножению) множество комплексных чисел по модулю единица.

Ответ а): Да, по сложению

Ответ б): Да, по умножению

Ответ в): Нет, ни по сложению, ни по умножению

Задача 2.

Определить, является ли группой (по сложению и умножению) множество комплексных чисел $1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$.

Ответ а): Да, по сложению

Ответ б): Да, по умножению

Ответ в): Нет, ни по сложению, ни по умножению

Задача 3.

Какие из перечисленных множеств являются подгруппами циклической группы 6-го порядка, образованной по элементу a ($a^6=1$)?

Ответ а): a, a^2, a^3 .

Ответ б): a^2, a^4, a^6 .

Ответ в): a^3, a^6 .

Задача 4.

Какие из множеств матриц могут осуществлять представление какой-либо группы?

Ответ а): σ_0, σ_y .

Ответ б): σ_x, σ_y .

Ответ в): σ_0, β ,

$$\text{где } \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.

Определить, какие из точечных групп являются абелевыми

Ответ а): C_4 .

Ответ б): C_{3v} .

Ответ в): O_h .

Правильные ответы к задачам:

Задача 1: б

Задача 2: б

Задача 3: б, в

Задача 4: а

Задача 5: а

Задачи для оценки сформированности компетенции ПК-1 (приведены ответы к задачам в тестовой форме)

Задача 1.

Число неприводимых представлений абелевой группы 6-го порядка равно

Ответ а): двум;

Ответ б): шести;

Ответ в): трём.

Задача 2.

Найти характеры элементов группы инверсии (E, I) в представлении

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ а): $\chi(E) = 2, \chi(I) = 0$.

Ответ б): $\chi(E) = 0, \chi(I) = 1$.

Ответ в): $\chi(E) = 0, \chi(I) = 2$.

Задача 3.

Гамильтониан $\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{U_0}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ инвариантен относительно преобразований, индуцированных группой

Ответ а): C_3 .

Ответ б): C_{2h} .

Ответ в): C_4 . (Ось поворота совпадает с осью z)

Задача 4.

Частица движется в поле, инвариантном относительно преобразований группы D_3 (см. Таблицу характеров). Дискретные уровни энергии такой частицы вырождены с кратностью s, где

Ответ а): s=1,2,3.

Ответ б): s=1,2.

Ответ в): s=1,6.

Задача 5.

Дискретные уровни энергии частицы вырождены, если её гамильтониан инвариантен относительно преобразований группы

Ответ а): инверсии C_i .

Ответ б): C_{2h} .

Ответ в): C_{3v} .

Правильные ответы к задачам

(приведены ответы к задачам в тестовой форме)

Задача 1: б

Задача 2: а

Задача 3: б

Задача 4: б

Задача 5: в

6.3.2. Вопросы для итогового контроля сформированности компетенции:

1. Подгруппа. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
2. Классы сопряженных элементов. Инвариантная подгруппа. Фактор-группа.
3. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Примеры.
4. Определение представления группы. Существование эквивалентного унитарного представления.
5. Представление, индуцируемое базисом. Представление в функциональном пространстве.
6. Первая лемма Шура.
7. Вторая лемма Шура.
8. Соотношения ортогональности для матричных элементов и характеров неприводимых представлений.
9. Регулярное представление. Число неприводимых представлений.
10. Критерий неприводимости. Разложение приводимого представления на неприводимые.
11. Композиция представлений группы. Прямое произведение групп.
12. Характеры неприводимых представлений циклических групп.
13. Неприводимые представления группы трансляций.
14. Звезда вектора k . Группа волнового вектора.
15. Классификация уровней энергии. Теория возмущений.
16. Правила отбора.
17. Молекулярные колебания. Роль симметрии в молекулярных колебаниях.
18. Непрерывные группы Группы Ли.
19. Группа двумерных вращений $O+(2)$.
20. Неприводимые представления группы $O+(3)$.

6.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Учебные аудитории могут быть при необходимости оснащены демонстрационным оборудованием для сопровождения учебных занятий презентациями.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 03.04.02 Физика.

Автор(ы):

доцент кафедры теоретической физики физического факультета, к. ф.-м. н., доцент Г.М. Максимова.

Рецензенты(ы):

Заведующий кафедрой:

зав. кафедрой теоретической физики физического факультета, д. ф.-м. н., доцент В.А. Бурдов.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 20.05.2023, протокол № б/н.