

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от
«31» мая 2023г. № 6

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород
2023 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части Блока 1 Дисциплины (модули) Б1.О.12.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.12, «Линейная алгебра» относится к обязательной части ООП направления подготовки специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<i>ОПК-1</i> Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	<i>ОПК-1.1.</i> Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук	Знает основные понятия алгебры, постановки стандартных задач и методы их решения, основы строгого доказательства утверждений, формулировки результатов, вывода следствий из полученного результата.	<i>Собеседование</i>
	<i>ОПК-1.2.</i> Умеет формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук.	Умеет анализировать и решать стандартные алгебраические задачи с применением современного математического аппарата.	<i>Контрольная работа</i>
	<i>ОПК-1.3.</i> Имеет практический опыт постановки и решения актуальных задач математики и механики.	Владеет навыками применения основных вычислительных алгоритмов алгебры для решения прикладных задач с использованием современных компьютерных технологий.	<i>Контрольная работа</i>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	5 з.е.
Часов по учебному плану	180
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа): - занятия лекционного типа	48

- занятия семинарского типа	48
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	46
Промежуточная аттестация: экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Очная форма обучения						
Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				СР ¹ , часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				
		из них				
		ЗЛеТ ²	ЗСеТ ³	ЗЛаТ ₄	Всего	
Векторное (линейное) пространство	44	12	12		24	10
Линейные отображения	44	12	12		24	12
Билинейные и квадратичные формы	44	12	12		24	12
Евклидово (унитарное) пространство	46	12	12		24	12
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен (36 часов)	36					
Итого	216	48	48		98	46
¹ Самостоятельная работа обучающегося.						
² Занятия лекционного типа.						
³ Занятия семинарского типа.						
⁴ Занятия лабораторного типа.						

Краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля)

2 семестр

- 1. Векторное (линейное) пространство.** Линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Координаты, матрица перехода от одного базиса к другому.
- 2. Линейные отображения** (операторы), действия с ними, их матрицы. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения. Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен оператора (матрицы).
- 3. Билинейные и квадратичные формы.** Изменение матрицы квадратичной функции при изменении базиса. Метод Лагранжа приведения симметричной билинейной формы к каноническому виду. Закон инерции.
- 4. Евклидово (унитарное) пространство.** Скалярное произведение, свойства. Ортогональные векторы. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

Практические занятия (семинарские занятия) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

На проведение практических занятий (семинарских занятий) в форме практической подготовки отводится 48 часов.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: анализировать и решать стандартные алгебраические задачи с применением современного математического аппарата.
- компетенций – ОПК-1.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа, групповых или индивидуальных консультаций.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамена).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного и дополнительного материала, заключается в выполнении домашних заданий, самостоятельном разборе некоторых несложных доказательств, конкретно указанных преподавателем во время чтения лекций.

Домашние задания проверяются путём опроса на практических занятиях, контрольные работы проверяются преподавателем, затем проводится разбор работ на практическом занятии, проверенные работы возвращаются обучающимся. Усвоение доказательств, в том числе оставленных на самостоятельный разбор обучающихся, контролируется на коллоквиуме. На зачёте контролируется умение студентов решать задачи. На экзамене определяется как степень усвоения теоретического материала, так и умения решать задачи.

1. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие для студентов мех.-мат. специальностей вузов., 1980, 1986, 2005, 2008 (В библиотеке ННГУ более 50 экз.)

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий), контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к *зачёту*.

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		Знания	Умения	Навыки
плохо	не зачтено	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа
		Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
удовлетворительно	зачтено	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.

Шкала оценивания сформированности компетенций	Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
	Знания	Умения	Навыки
	Допущено несколько негрубых ошибок	все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
незачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

Критерии оценок выполнения контрольной работы (каждая задача оценивается в 2 балла)

Решена полностью	2
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	1,5
Решена задача наполовину	1
Сделан первый этап в решении задачи	0,5
Нет решения	0

Суммарная оценка выполнения контрольной работы

Количество баллов при $n=3, 4, 5$ задачах	Оценка
$2n$	Превосходно
$2n-0,5$	Отлично
$2n-1$	Очень хорошо
$2n-2$	Хорошо
от 3 до $2n-3$	Удовлетворительно
$0,5-3$	Неудовлетворительно
0	Плохо

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
2 семестр	
1. Аксиомы векторного пространства. Следствия из аксиом. Примеры векторных пространств. Подпространства, примеры.	ОПК-1
2. Линейная комбинация, линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость, свойства.	ОПК-1
3. Эквивалентные определения базиса, примеры. Конечномерные, бесконечномерные пространства.	ОПК-1
4. Лемма о линейно независимой системе. Теорема о количестве векторов в базисе, размерность.	ОПК-1
5. Теорема о дополнении до базиса. Свойство бесконечномерных пространств.	ОПК-1
6. Теорема о монотонности размерности.	ОПК-1
7. Координаты вектора в базисе, матрица перехода, ее невырожденность, формула изменения координат при переходе к новому базису.	ОПК-1
8. База системы векторов и ранг системы векторов.	ОПК-1
9. Сумма и пересечение подпространств, линейная оболочка объединения.	ОПК-1
10. Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.	ОПК-1
11. Прямая сумма. Критерий прямой суммы.	ОПК-1
12. Линейные отображения векторных пространств, свойства, примеры. Матрица линейного отображения в базисах. Матричная запись. Формула преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов.	ОПК-1
13. Матрица линейного оператора. Матричная запись. Координаты образа вектора. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса.	ОПК-1
14. Теорема о задании линейного отображения на базисе. Теорема о соответствии между линейными отображениями и матрицами.	ОПК-1
15. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.	ОПК-1
16. Сумма линейных отображений, произведение на число, композиция. Их матрицы.	ОПК-1
17. Собственные векторы. Собственные значения линейного оператора и корни характеристического многочлена. Инвариантность характеристического многочлена.	ОПК-1
18. Билинейные формы. Однозначность определения на базисе. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы при переходе к другому базису.	ОПК-1
19. Симметрические, кососимметрические формы. Квадратичная форма, поляризация квадратичной формы, канонический вид.	ОПК-1
20. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.	ОПК-1
21. Закон инерции квадратичных форм над \mathbb{R} .	ОПК-1
22. Евклидовы пространства, скалярное произведение, свойства. Длина вектора, неравенство Коши-Буняковского, следствия, угол между векторами.	ОПК-1
23. Ортогональные системы векторов. Ортонормированный базис. Скалярное произведение в о.н.б. Матрица Грама.	ОПК-1
24. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.	ОПК-1

5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

2 семестр

1. Найти матрицу перехода от базиса $v_1=(1, 1, 1)$, $v_2=(1, 1, 0)$, $v_3=(-1, 0, -1)$ к базису $u_1=(1, 2, 0)$, $u_2=(2, 2, 1)$, $u_3=(2, 1, 2)$.
2. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $\langle(1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle$ и $\langle(-1,-1,1,0),(2,2,0,1)\rangle$.
3. Выяснить является преобразование пространства R^3 линейным и если да, то найти его матрицу в базисе $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 1)$, $e_3 = (1, 2, 3)$:
А) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$.
Б) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1x_2, x_3)$.
4. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $v_1=(1, 0, 1)$, $v_2=(0, 1, 1)$, $v_3=(1, 1, 0)$ в векторы $u_1=(4, 4, 5)$, $u_2=(5, 3, 4)$, $u_3=(3, 5, 3)$, соответственно.

5. Матрица оператора φ в базисе $a_1=(1, 1)$, $a_2=(1, 0)$ равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

матрица оператора ψ в базисе $b_1=(-1, -1)$, $b_2=(1, 2)$ равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\varphi + \psi$ в базисе $\{b_1, b_2\}$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти нормальный вид в области вещественных чисел и невырожденное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

8. Найти канонический вид и ортогональное преобразование, приводящее f к каноническому виду (приведение к главным осям),

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

9. Процессом ортогонализации Грама-Шмидта построить ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 3, -2)$, $u_3 = (2, 1, 0)$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2003. (100экз.)
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. (40экз.)

б) дополнительная литература:

1. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. для студентов ун-тов и техн. вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика и информатика". – М.: Проспект : Изд-во Моск. ун-та, 2012. – 400 с. (40экз.)
2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. (30экз.)
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. 2001, 2007, 2008. (100экз.)

**в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы
(в соответствии с содержанием дисциплины)**

<http://www.lib.unn.ru/>

1. Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>
2. Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01
Фундаментальные математика и механика

Автор(ы)

к.ф.-м.н., доцент Разуваев А.Г.

Рецензент(ы)

Заведующий кафедрой
алгебры, геометрии и
дискретной математики

д.ф.-м.н., профессор Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от «31» мая 2023 года, протокол № 7.