

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования_
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Численные методы решения задач оптимизации

Уровень высшего образования
Магистратура

Направление подготовки / специальность
01.04.01 - Математика

Направленность образовательной программы
Фундаментальная математика и приложения

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.16 Численные методы решения задач оптимизации относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-3: Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1: Знать основные принципы управления командой проекта УК-3.2: Уметь вырабатывать командную стратегию при выполнении ИТ проекта УК-3.3: Владеть методами мотивации команды на достижение поставленной цели	УК-3.1: Знать различные приемы и способы организации командной работы по созданию программных комплексов, реализующих численные методы оптимизации функций многих переменных УК-3.2: Уметь вырабатывать командную стратегию для создания программных комплексов, реализующих численные методы оптимизации функций многих переменных УК-3.3: Владеть навыками руководства командной работой по созданию программных комплексов, реализующих численные методы оптимизации функций многих переменных	Собеседование	Зачёт: Отчет по лабораторным работам
ОПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2: Умеет выбирать методы решения задач	ОПК-1.1: Знать основы математической теории оптимизации, включая необходимые и достаточные условия оптимальности функций многих переменных и	Собеседование Задачи	Зачёт: Отчет по лабораторным работам

	профессиональной деятельности на основе теоретических знаний ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности	численные алгоритмы оптимизации таких функций ОПК-1.2: Уметь правильно выбирать наиболее подходящий и эффективный алгоритм численной оптимизации для решения конкретной задачи, давать теоретическое обоснование сделанного выбора, а также использовать соответствующий алгоритм оптимизации для решения конкретных задач ОПК-1.3: Владеть навыками разработки программ для численной оптимизации функций многих переменных и формализации конкретных прикладных задач		
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация	0
	Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем),	Самостоятельная работа

		часы из них			обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
Тема 1. Постановки прикладных задач и их формализация.	9		3	3	6
Тема 2. Классификация численных методов оптимизации.	4		1	1	3
Тема 3. Основы выпуклого анализа.	9		3	3	6
Тема 4. Общая задача минимизации.	8		2	2	6
Тема 5. Задание целевой функции как подпрограммы в системе MATLAB.	7		1	1	6
Тема 6. Метод наискорейшего спуска. Овражный эффект. Визуализация работы метода в системе MATLAB.	9		3	3	6
Тема 7. Метод тяжелого шарика. Методы сопряженных направлений и со-пряженных градиентов для квад-ратичных функций и в общем случае. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.	9		3	3	6
Тема 8. Методы Ньютона и Ньютона-Рафсона.	8		2	2	6
Тема 9. Квазиньютоновские методы: DFP, Бroyдена, BFS, BFGS.	9		3	3	6
Тема 10. Методы доверительной области.	9		3	3	6
Тема 11. Методы прямого поиска (сим-плексный метод Нелдера-Мида и метод конфигураций Хука-Дживса).	9		3	3	6
Тема 12. Методы решения нелинейной задачи наименьших квадратов (методы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта). .	8		2	2	6
Тема 13. Симплекс-метод для решения задач линейного программирования.	0	2	4	0	3
Тема 13. Простейшие методы нелинейной условной оптимизации (метод проекции градиента, метод условного градиента, метод квадратичного штрафа). .	9		3	3	6
Тема 15. Метод квадратичного штрафа.	0	2	4	0	2
Тема 16. Метод модифицированной функции Лагранжа.	0	2	4	0	2
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	0	32	33	75

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Введение. Постановки прикладных задач и их формализация. Классификация задач математического программирования. Терминология.

Тема 2. Классификация численных методов оптимизации.

Тема 3. Основы выпуклого анализа. Определение и основные свойства выпуклых множеств. Проекция на выпуклое множество. Отделимость. Возможные направления. Одномерные сечения. Определение и основные свойства выпуклых функций. Критерии выпуклости в классах дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций. Понятие сильной выпуклости. Точки минимума выпуклых функций.

Тема 4. Общая задача минимизации. Постановка, понятие глобального и локального минимума.

Достаточные условия существования глобального минимума. Необходимые и достаточные условия оптимальности.

Тема 5. Задание целевой функции как подпрограммы в системе MATLAB. Особенности ее вызова для случаев, когда требуется или не требуется градиент, гессиан. Построение линий уровня и сеточного графика функции двух переменных в системе MATLAB.

Тема 6. Метод наискорейшего спуска. Овражный эффект. Визуализация работы метода в системе MATLAB.

Тема 7. Метод тяжелого шарика. Методы сопряженных направлений и сопряженных градиентов для квадратичных функций и в общем случае. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.

Тема 8. Методы Ньютона и Ньютона-Рафсона. Способы проверки матрицы на положительную определенность.

Тема 9. Квазиньютоновские методы: DFP, Бройдена, BFS, BFGS.

Тема 10. Методы доверительной области.

Тема 11. Методы прямого поиска: симплексный метод Нелдера-Мида и метод конфигураций Хука-Дживса.

Тема 12. Методы решения нелинейной задачи наименьших квадратов: методы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта.

Тема 13. Простейшие методы нелинейной условной оптимизации: метод проекции градиента, метод условного градиента.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

Электронные курсы, созданные в системе электронного обучения ННГУ:

Численные методы решения задач оптимизации (Чернов А.В.),
<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=5822>.

Иные учебно-методические материалы:

1. Сумин В.И. Классические разделы теории конечномерных экстремальных задач. Часть 1. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Методическая разработка. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2001 (142).
2. Сумин В.И. Элементарный выпуклый анализ. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (170).
3. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).
4. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
5. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
6. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции УК-3:

1. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача безусловной конечномерной минимизации.
2. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача условной конечномерной минимизации.
3. Привести классификацию численных методов оптимизации.
4. Описать синтаксис основных команд системы MATLAB, используемых для построения линий уровня и сеточного графика функции двух переменных.
5. Описать технологию визуализации работы численных методов безусловной двумерной оптимизации в системе MATLAB.
6. Описать технологию визуализации допустимого множества задачи условной двумерной оптимизации в системе MATLAB.
7. Понятие выпуклого множества. Свойства выпуклых множеств.
8. Понятие проекции точки на множество. Критерий проекции на выпуклое множество.
9. Понятие выпуклой функции. Свойства выпуклых функций.
10. Критерий выпуклости в классе дифференцируемых функций.
11. Понятие положительной и неотрицательной определенности матрицы. Критерий Сильвестра.
12. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций.
13. Точки минимума выпуклых функций и их свойства.
14. Критерий оптимальности в классе выпуклых дифференцируемых функций.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Понятие возможного направления. Понятие направления спуска. Необходимое условие оптимальности общего вида в общей задаче минимизации.
2. Необходимое и достаточное условия направления спуска.
3. Необходимое условие оптимальности первого порядка в общей задаче минимизации.
4. Градиентные методы (в частности, простейший с фиксированным шагом, и метод наискорейшего спуска). Овражный эффект (объяснение с помощью геометрической иллюстрации).
5. Три теоремы о сходимости градиентных методов (одна – с док-вом).
6. Минимизация квадратичных функций: методы сопряженных направлений (с выводом итерационной формулы на основе леммы о линейной независимости сопряженных направлений).
7. Минимизация квадратичных функций: метод сопряженных градиентов как метод сопряженных направлений.
8. Метод сопряженных градиентов для случая неквадратичной функции (методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса).
9. Метод тяжелого шарика.
10. Методы Ньютона (идея метода; алгоритм; теорема о сходимости; достоинства и недостатки) и Ньютона-Рафсона.
11. Понятие о квазиньютоновских методах.
12. Метод проекции градиента.
13. Метод условного градиента.

14. Метод квадратичного штрафа.

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно»
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно»

5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Задача 1. Существует ли точка глобального минимума в задаче оптимизации:

$$f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min, \quad x^2 + y^2 \leq 4? \text{ Почему?}$$

Задача 2. Проверить на выпуклость множество $X = \Gamma_{\varepsilon, \alpha}$.

Задача 3. Проверить на выпуклость функцию $f(x) = (x_1)^2 - x_1 x_2 + (x_2)^2$ на множестве $X = R^2$.

Задача 4. Найти итерационную последовательность метода наискорейшего спуска в задаче $\frac{1}{2}(2(x^1)^2 + (x^2)^2) \rightarrow \min, \quad x \in R^2$, взяв начальную точку $x_0 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

Задача 5. Решить задачу $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$ методом Ньютона, начав с точки (1,1).

Задача 6. Для задачи $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min, \quad (x^1)^2 + x^2 \leq 1, \quad x^2 \geq 0$, построить допустимое множество и линии уровня целевой функции; указать точку глобального минимума (если она существует). Выполняются ли какие-то достаточные условия существования глобального минимума в этой задаче?

Задача 7. Решить задачу безусловной минимизации: $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Доказать, что решением задачи $\varphi(x) = (c, x) \rightarrow \min, \quad x \in X = \{x \in R^n : |x - z| \leq r\}, \quad c \neq 0$,

является $\bar{x} = z - \frac{c}{|c|}r$. В каком из методов условной оптимизации приходится решать подобного сорта задачи?

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	задача решена.
не зачтено	задача не решена.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой

	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Отчет по лабораторным работам) для оценки сформированности компетенции УК-3

Возможные темы лабораторных работ:

1. Построение сеточного графика и линий уровня функции двух переменных.
2. Метод наискорейшего спуска.
3. Метод Ньютона-Рафсона.
4. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.
5. Методы DFP и BFGS.
6. Простейший метод доверительной области.
7. Метод Нелдера-Мида.
8. Метод конфигураций Хука-Дживса.
9. Метод Гаусса-Ньютона.

Примечание. Студенты разделяются на команды по 2-3 человека, каждая команда получает отдельное задание по одной из приведенных выше тем,

пишет программу, реализующую соответствующий метод в системе MATLAB, и минимизирует с его помощью конкретную функцию

из индивидуального задания, после чего пишет письменный отчет и защищает его на семинарском занятии.

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Отчет по лабораторным работам) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Темы лабораторных работ:

1. Построение сеточного графика и линий уровня функции двух переменных.
2. Метод наискорейшего спуска.
3. Метод Ньютона-Рафсона.
4. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.
5. Методы DFP и BFGS.

Примечание. Каждый студент получает индивидуальные задания по каждой из приведенных выше тем, самостоятельно пишет программу,

реализующую соответствующий метод в системе MATLAB, и минимизирует с его помощью конкретную функцию из индивидуального задания,

после чего пишет письменный отчет и защищает его на семинарском занятии.

Критерии оценивания (оценочное средство - Отчет по лабораторным работам)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Программная реализация метода корректна, результаты работы программы адекватные, отчет написан грамотно.
не зачтено	Программная реализация метода некорректна и/или результаты работы программы неадекватные и/или отчет написан с ошибками или плохо оформлен.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Сухарев Алексей Григорьевич. Курс методов оптимизации. - М. : Наука, 1986. - 325, [1] с. : ил. - 1.80., 3 экз.
2. Васильев Федор Павлович. Численные методы решения экстремальных задач : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Приклад. математика". - Изд. 2-е, перераб. и доп. - М. : Наука, 1988. - 549 с. : ил. - ISBN 5-02-013796-0 (в пер.) : 1.60., 178 экз.
3. Чернов Андрей Владимирович. Численные методы оптимизации : учебно-методическое пособие / А. В. Чернов ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2024. - 164 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=892332&idb=0>.
4. Чернов А. В. Численные методы оптимизации / Чернов А. В. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2024. - 164 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика». - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Ветеринария и сельское хозяйство., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=927217&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Поляк Борис Теодорович. Введение в оптимизацию. - М. : Наука, 1983. - 384 с. : ил. - 2.40., 12 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 486.12.06
2. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 486.12.06
3. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 1174.16.06
4. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 1173.16.06
5. <http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

система MATLAB

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензент(ы): Баландин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Заведующий кафедрой: Иванченко Михаил Васильевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.