

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
президиумом
Ученого совета ННГУ
протокол от
«14» декабря 2021 г. № 4

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Теория функций комплексного переменного
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования
бакалавриат
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность
03.03.03 «Радиофизика»

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы
Радиофизика и электроника
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)
бакалавр
(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения
очная
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2022 год

1. Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП по направлению подготовки 03.03.03 "Радиофизика" с профилем «Радиофизика и электроника». Дисциплина обязательна для освоения в 3 семестре.

Студенты к моменту освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного», согласно ФГОС ВО, ознакомлены с основными теоретическими понятиями и прикладными знаниями, полученными в рамках изучения дисциплин «Математический анализ», «Кратные интегралы и ряды», «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра».

К моменту изучения дисциплины у студентов присутствуют устойчивые представления, касающиеся математического анализа, студенты владеют основами аналитической геометрии и линейной алгебры.

Целями освоения дисциплины являются:

- знать элементы теории аналитических функций, конформных отображений и вычетов;
- уметь применять методы теории функций комплексного переменного к решению прикладных задач;
- освоить технику расчета несобственных и контурных интегралов с помощью вычетов;
- иметь представление о комплексных числах и функциях комплексного переменного.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций
<i>ОПК-1:</i> Способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности. Уровень освоения – базовый.	<i>З1 (ОПК-1):</i> Знать базовые понятия, связанные с пределом и производной функции комплексного переменного; элементы теории конформных отображений; основные разложения аналитических функций; базовые понятия теории вычетов и их применение в задачах естествознания. <i>У1 (ОПК-1):</i> Уметь решать ключевые задачи теории функций комплексного переменного, доказывать основные утверждения теории; уметь решать задачи на применение теории функций комплексного переменного в задачах естествознания. <i>В1 (ОПК-1):</i> Владеть математическим аппаратом

	доказательства основных утверждений и методами решения ключевых задач теории функций комплексного переменного.
<p>ОПК-2:</p> <p>Способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.</p> <p>Уровень освоения – базовый.</p>	<p>З1 (ОПК-2): Знать основные библиографические и интернет-источники содержания курса «Теория функций комплексного переменного» и способы работы с ними, основные образовательные и информационные технологии решения поставленных задач.</p> <p>У1 (ОПК-2): Уметь выявлять необходимый набор компонентов содержания курса «Теория функций комплексного переменного» для решения конкретной задачи.</p> <p>В1 (ОПК-2): Владеть приемами работы с научной и учебной литературой, с образовательными и технологическими ресурсами для решения конкретных задач.</p>

Окончательное завершение формирования компетенций, предусмотренных в рамках данной дисциплины, происходит после сдачи экзамена по этой дисциплине.

3. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, всего 180 часов, из которых 82 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (32 часа занятия лекционного типа, 48 часов занятия семинарского типа, 2 часа мероприятия промежуточной аттестации), 98 часов составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. включая 45 часов подготовки к экзамену).

Содержание дисциплины (модуля)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)			В том числе														
				Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них												Самостоятельная работа обучающегося, часы		
	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Всего								
	Очное	Очно-заочное	Заочное	Очное	Очно-заочное	Заочное	Очное	Очно-заочное	Заочное	Очное	Очно-заочное	Заочное	Очное	Очно-заочное	Заочное			
Тема 1 Функции комплексного переменного, предел и производная	25			7			10									12		
Тема 2 Элементы теории	11			3			4									4		

конформных отображений																		
Тема 3 Интегрирование функции комплексного переменного	15			7			6									6		
Тема 4 Ряды аналитических функций	40			10			14									16		
Тема 5 Теория вычетов и ее приложения	32			5			12									15		
В т.ч.текущий контроль	2						2									0		
Промежуточная аттестация - Экзамен																		

Текущий контроль успеваемости проходит в рамках занятий семинарского и практического типа. Итоговый контроль осуществляется на экзамене.

4. Образовательные технологии

В соответствии с рабочей программой и тематическим планом изучение дисциплины проходит в виде аудиторной и самостоятельной работы студентов. Учебный процесс в аудитории осуществляется в форме практических занятий.

Образовательные технологии, способствующие формированию компетенций

используемые на занятиях лекционного типа:

- лекции с проблемным изложением учебного материала;
- лекции с детальным объяснением нового материала и его связи с уже пройденным материалом;

используемые на занятиях практического типа:

- регламентированная самостоятельная деятельность студентов;
- частично-поисковая деятельность при решении задач повышенной сложности,
- текущий контроль знаний студентов с помощью контрольной работы.

На лекциях раскрываются следующие основные темы изучаемого курса, которые входят в рабочую программу: понятие функции комплексного переменного, непрерывность, дифференцирование функции комплексного переменного, условия Коши-Римана в декартовых и полярных координатах, свойства аналитических функций, геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного, определение и общие свойства конформного отображения, отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями, основные принципы конформного отображения, основная задача теории конформных отображений, теорема Римана, круговое свойство отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией, определение и основные свойства интеграла от функции комплексного переменного, теорема Коши для односвязной и многосвязной областей, первообразная аналитической функции, неопределенный интеграл, формула Коши, интеграл Коши, аналитическая зависимость интеграла от параметра, существование производных всех порядков у аналитической функции, теоремы Морера и Лиувилля, основная теорема высшей алгебры, равномерная сходимость рядов функций комплексного переменного, свойства равномерно сходящихся рядов, теоремы Вейерштрасса, степенные ряды, ряд Тейлора, единственность определения аналитической функции, аналитическое продолжение, понятие полной аналитической функции, ряд Лорана, классификация изолированных особых точек однозначных функций, определение вычета функции относительно конечной изолированной особой точки и бесконечно удаленной точки, формулы

вычисления вычетов в простом полюсе и в полюсе порядка m , основная теорема о вычетах, теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости, вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов, вычисление главных значений по Коши несобственных интегралов с помощью вычетов, лемма Жордана, вычисление главных значений несобственных интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов, логарифмический вычет, теорема о подсчета числа нулей функции комплексного переменного

На практических занятиях более подробно изучается программный материал в плоскости отработки практических умений и навыков и усвоения следующих тем:

1. Формы представления комплексного числа. Простейшие действия над комплексными числами.
2. Геометрическая интерпретация неравенств и уравнений для комплексного переменного.
3. Элементарные функции комплексного переменного.
4. Логарифмическая и обратные тригонометрические функции комплексного переменного. Решение уравнений.
5. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
6. Интегрирование функции комплексного переменного.
7. Интегральная теорема Коши. Первообразная аналитической функции. Интегральная формула Коши.
8. Конформные отображения. Преобразование области по заданному отображению.
9. Конформные отображения. Решение фундаментальной задачи для заданных областей.
10. Контрольная работа по теме «Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного».
11. Степенные ряды.
12. Ряд Тейлора.
13. Нули аналитических функций.
14. Ряд Лорана, отыскание его области сходимости.
15. Основные приемы разложения функций в ряд Лорана.
16. Разложение в ряд Лорана многозначных функций.
17. Классификация особых точек однозначных функций.
18. Классификация особых точек многозначных функций.
19. Вычисление вычетов.
20. Контрольная работа по теме «Разложение аналитических функций в ряды и вычисление вычетов».
21. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.
22. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов.
23. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.
24. Вычисление главных значений несобственных интегралов с помощью вычетов и леммы Жордана.

Формой **итогового контроля** знаний студентов по дисциплине является **экзамен**, в ходе которого оценивается уровень теоретических знаний и навыки решения практических задач.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов направлена на выполнение домашних заданий по темам практических занятий, подготовку к контрольным работам по темам «Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного» и «Разложение аналитических функций в ряды и вычисление вычетов», а также подготовку к экзамену по указанной дисциплине. При подготовке к практическому занятию необходимо помнить, что данная дисциплина тесно связана с ранее изучаемыми дисциплинами «Математический анализ», «Кратные интегралы и ряды», «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра».

Цель самостоятельной работы - подготовка современного компетентного специалиста и формирование способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

На семинарских занятиях студент должен уметь последовательно излагать свои мысли и аргументировано их отстаивать.

Для достижения этой цели необходимо:

- 1) ознакомиться с соответствующей темой программы изучаемой дисциплины;
- 2) осмыслить круг изучаемых вопросов и логику их рассмотрения;
- 3) изучить рекомендованную учебно-методическим комплексом литературу по данной теме;
- 4) тщательно изучить лекционный материал.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю),
включающий:

- 6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

ОПК-1: способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (базовый уровень).

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
Знания Знать и понимать современный математический аппарат, методы его совершенствования.	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа	Уровень знаний теоретического материала ниже минимальных требований. Имели место грубые	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки

	обучающе гося от ответа	ошибки			несущест венных ошибок		
<u>Умения</u> <i>Уметь</i> применять соответств ующий математич еский аппарат для решения профессио нальных задач.	Отсутстви е минималъ ных умений Невозмож ность оценить наличие умений вследствие отказа обучающе гося от ответа	При решении стандарт ных задач не продемон стрирова ны основные умения. Имели место грубые ошибки..	Продемонс трированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнен ы все задания но не в полном объеме..	Продемонс трированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнен ы все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетам и	Продемо нстриров аны все основные умения. Решены все основные задачи . Выполне ны все задания, в полном объеме, но некоторы е с недочета ми.	Продемо нстриров аны все основные умения, решены все основные задачи с отдельны ми несущест венными недочета ми, выполне ны все задания в полном объеме	Продемо нстриров аны все основны е умения. Решены все основны е задачи. Выполне ны все задания, в полном объеме без недочето в.
<u>Навыки</u> <i>Владеть</i> опытом применен ия соответств ующего математич еского аппарата для решения профессио нальных задач.	Отсутстви е опыта владения материало м. Невозмож ность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающе гося от ответа	При решении стандарт ных задач не продемон стрирова ны базовые навыки. Имели место грубые ошибки .	Имеется минималъ ный набор навыков для решения стандартн ых задач с некоторым и недочетам и	Продемонс трированы базовые навыки при решении стандартн ых задач с некоторым и недочетам и	Продемо нстриров аны базовые навыки при решении стандарт ных задач без ошибок и недочето в .	Продемо нстриров аны навыки при решении нестанда ртных задач без ошибок и недочето в .	Продемо нстриров ан творческ ий подход к решению нестанда ртных задач
Шкала оценок по проценту правильно выполнен ных контрольн ых заданий	0 – 20 %	20 – 50 %	50 – 70 %	70-80 %	80 – 90 %	90 – 99 %	100%

6.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Итоговый контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде экзамена, на котором определяется:

- уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентами изученного материала;
- способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Экзамен проводится в устной форме и заключается в ответе студента, после предварительной подготовки, на теоретические вопросы по курсу и представлении решения практических задач с последующим их обоснованием.

Превосходно	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями
Отлично	Подготовка с некоторыми ошибками, уровень которой существенно выше среднего
Очень хорошо	В целом хорошая подготовка с рядом заметных ошибок, принципиально не искажающих суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
Хорошо	Хорошая подготовка с заметными ошибками, частично искажающими суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
Удовлетворительно	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям
Не удовлетворительно	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания
Плохо	Подготовка, совершенно недостаточная для понимания сути задачи (проблемы)

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих сформированность компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- устные и письменные опросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания, включающих одну или несколько задач (вопросов).

Для проведения итогового контроля сформированности компетенции используются:

- письменные и устные ответы на теоретические вопросы,
- решение практических задач.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих сформированность компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Список вопросов по теории к экзамену (для оценки сформированности знаний компетенции ОПК-1)

1. Предел последовательности комплексных чисел. Необходимое и достаточное условие сходимости.

2. Теорема об ограниченной последовательности. Критерий Коши.
3. Введение бесконечно удаленной точки (комплексного числа $z=\infty$). Сфера Римана.
4. Определение функции комплексного переменного, ее геометрический смысл. Многозначность и однолиственность отображения.
5. Определение предела функции комплексного переменного по Коши и по Гейне. Непрерывность и ее геометрический смысл.
6. Примеры отображений, осуществляемых простейшими непрерывными функциями (линейная, квадратичная, отображение инверсии).
7. Определение производной функции комплексного переменного. Необходимое условие дифференцируемости функции комплексного переменного (условия Коши-Римана). Формула нахождения производной.
8. Достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие аналитической функции.
9. Условия Коши-Римана в полярных координатах. Формула вычисления производной. Пример: степенная функция.
10. Условия Коши-Римана для модуля и аргумента функции. Формула вычисления производной. Пример: показательная функция.
11. Простейшие свойства аналитических функций.
12. Свойства действительной и мнимой частей аналитической функции.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Свойства сохранения углов и постоянства растяжения.
14. Определение конформного отображения. Основная задача теории конформных отображений. Функции, осуществляющие конформные отображения.
15. Конформные отображения, осуществляемые линейной и степенной функциями. Поверхность Римана.
16. Конформное отображение, осуществляемое показательной функцией. Пример: отображение бесконечной вертикальной полосы на верхнюю полуплоскость.
17. Основные принципы конформного отображения.
18. Теорема Римана. Невозможность конформного отображения многосвязной области на односвязную. Условия единственности отображения.
19. Основные свойства конформного отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией.
20. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг с помощью дробно-линейной функции.
21. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его вычисление.
22. Свойства интеграла от функции комплексного переменного.
23. Теорема Коши для односвязной области.
24. Обобщение теоремы Коши на случай многосвязной области.
25. Теорема о первообразной аналитической функции в односвязной области.
26. Введение неопределенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
27. Вывод формулы Коши. Следствия: формула среднего значения.
28. Принцип максимума модуля аналитической функции.
29. Аналитическая зависимость интеграла от параметра.
30. Существование производных всех порядков у аналитической функции.
31. Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема алгебры.
32. Равномерная сходимость рядов функций комплексного переменного. Достаточный признак Вейерштрасса. Критерий Коши.
33. Первая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
34. Свойства равномерно сходящихся рядов. Вторая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
35. Теорема Абеля об области абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда.
36. Следствия теоремы Абеля. Круг и радиус сходимости степенного ряда.

37. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
38. Теорема Тейлора.
39. Нули аналитической функции. Целая функция. Единственность определения аналитической функции.
40. Определение аналитического продолжения. Аналитическое продолжение в комплексную плоскость элементарных функций действительного переменного и соотношений между ними.
41. Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов. Понятие полной аналитической функции.
42. Определение ряда Лорана. Область его сходимости. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Лорана.
43. Правильные и особые точки. Классификация изолированных особых точек. Ограниченность функции в окрестности устранимой особой точки.
44. Поведение функции в окрестности полюса.
45. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
46. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, классификация изолированной особой точки $z=\infty$.
47. Определение вычета. Вычисление вычетов.
48. Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости.
49. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов.
50. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ с помощью вычетов.
51. Лемма Жордана. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)e^{imx}dx$ с помощью вычетов.
52. Логарифмический вычет. Вычисление вычетов логарифмической производной функции.
53. Теорема о числе нулей и полюсов, ее геометрический смысл.

Примеры практических заданий для экзамена (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-1)

1. Определить радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.
2. Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z=2$.
3. Вычислить тригонометрический интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 + \sin^2 x}$ ($a \in \mathbb{C}$).
4. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} dx$.

5. Определить радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.
6. Разложить в ряд Лорана функцию $z^2 e^{1/z}$ в окрестности точки $z = \infty$.
7. Вычислить контурный интеграл $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z-2i} dz$.
8. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утверждённое приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. № 55-ОД,

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 г. № 247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) основная литература:

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2010. – 612 с. (43 экз.).
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 528 с. (88 экз.).
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматлит, 2006. – 247 с. (202 экз.).

б) дополнительная литература:

4. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с. (59 экз.).
5. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976. – 407 с. (29 экз.).
6. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 447 с. (31 экз.).
7. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 320 с. (12 экз.).

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

http://www.unn.ru/books/met_files/raf-2016.pdf

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Для обучения студентов названной дисциплине имеются в наличии: специальные кабинеты, оборудованные мультимедийными средствами обучения; компьютерные классы, где имеется возможность выхода в Интернет; присутствует полный комплект лицензионного обеспечения, необходимый для работы компьютерных программ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций ОПОП ВО по направлению подготовки 03.03.03 «Радиофизика» (профиль «Радиофизика и электроника»).

Автор _____ Дубков А.А.

Рецензент _____ Гавриленко В.Г.

Заведующий кафедрой _____ Дубков А.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии радиофизического факультета от «09» декабря 2021 года, протокол № 07/21.