РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
дисциплины
Б1.ДВ.01.02 Математика

1.АННОТАЦИЯ

Программа отвечает потребностям обучающихся старших классов средних общеобразовательных организаций в подготовке к единому государственному экзамену (ЕГЭ), способствует углубленному изучению вызывающих затруднения отдельных разделов дисциплины «Математика» по выбору учащегося, систематизации, углублению, обобщению и закреплению знаний и умений под руководством опытных педагогов.

В рабочей программе представлены содержание математического образования, требования к обязательному и возможному уровню подготовки обучающегося и выпускника, виды контроля.

Задачи (в зависимости от выбранных для углубленного изучения разделов и тем):

- систематизация сведений о числах; изучение новых видов числовых выражений и формул; совершенствование практических навыков и вычислительной культуры, расширение и совершенствование алгебраического аппарата, сформированного в основной школе, и его применение к решению математических и нематематических задач;
- расширение и систематизация общих сведений о функциях, пополнение класса изучаемых функций, иллюстрация широты применения функций для описания и изучения реальных зависимостей;
- развитие представлений о вероятностно-статистических закономерностях в окружающем мире, совершенствование интеллектуальных и речевых умений путем обогащения математического языка, развития логического мышления;
- изучение свойств пространственных тел, формирование умения применять полученные знания для решения практических задач;
- знакомство с основными идеями и методами математического анализа.

Цели (в зависимости от выбранных для углубленного изучения разделов и тем):

- Обеспечить повышение уровня общеобразовательной подготовки учащихся по математике сформировать навыки и умения, необходимые для успешной сдачи единого государственного экзамена по математике.
- **формирование представлений** о математике, как универсальном языка науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для обучения в высшей школе по соответствующей специальности, в будущей профессиональной деятельности;
- **овладение математическими знаниями и умениями**, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- **воспитание** средствами математики культуры личности: отношения к математике как части общечеловеческой культуры: знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

2. СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-тематический план по дополнительной общеразвивающей программе представлен в таблице № 1.

Учебно-тематический план программы

Программа предусматривает обучение по любой из нижеперечисленных тем или их комбинации в объеме 12 академических часов (по выбору обучающегося).

Таблица 1

№п/п	**Название модуля, раздела, темы**	**Количество часов**			**Формы аттестации / контроля**
		Всего	**Теория**		
1.	**<u>Раздел 1</u>**. Степени и корни. Степенные функции. Показательная и логарифмическая функции	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
1.1	Тема 1. Степени и корни. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики.				
1.2	Тема 2. Показательные уравнения и неравенства. Понятие логарифма. Свойства логарифмов.				
2	**<u>Раздел 2.</u>** Предел, производная, первообразная и интеграл.	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
2.1	Тема 1. Определение и свойства предела последовательности и функции.				
2.2	Тема 2. Свойства пределов. Определение производной. Свойства производной				
2.3	Тема 3. Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Неопределенный интеграл. Первообразная.				
2.4	Тема 4. Задачи ЕГЭ на производные.				
2.5	Тема 5. Задачи на экстремумы.				
3	**<u>Раздел 3.</u>** Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств.	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
3.1	Тема 1. Тригонометрические уравнения.				
3.2	Тема 2. Показательные уравнения.				
3.3	Тема 3. Тригонометрические неравенства.				

3.4	Тема 4. Показательные неравенства.				
3.5	Тема 5. Алгебраические уравнения и неравенства.				
4	**Раздел 4.** Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей.	12	0	12	Педагогическое наблюдение. Опрос.
4.1	Тема 1. Сочетания, Размещения, Перестановки.				
4.2	Тема 2. Комбинаторные задачи.				
4.3	Тема 3. Основания теории вероятностей.				
4.4	Тема 4. Задачи на эксперименты с конечным числом исходов.				
4.5	Тема 5. Теорема о сумме вероятностей.				
4.6	Тема 6. Теорема о произведении вероятностей.				
4.7	Тема 7. Условные вероятности. Задачи.				
4.8	Тема 8. Экономические задачи.				
4.9	Тема 9. Планиметрия,,задачи на треугольники.				
4.10	Тема 10. Планиметрия.Трапеции,окружности.				
4.11	Тема 11. Стереометрия. Пирамиды,шары,конусы				
5	**Раздел 5.** Задачи с параметрами	12	0	12	Педагогическое наблюдение-Опрос.
5.1	Тема 1.Уравнения с параметром (тригонометрия).				
5.2	Тема 2. Уравнения с параметром (алгебра).				
5.3	Тема 3. Параметрические неравенства.				
5.4	Тема 4. Задачи ЕГЭ 17,18.				

3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

Проведение итоговой аттестации по дополнительной общеразвивающей программе не предусмотрено.

Оценка образовательных результатов обучающегося по дополнительной общеразвивающей программе носит вариативный характер. Инструменты оценки достижений обучающегося способствуют росту его самооценки и познавательных интересов, а также диагностируют мотивацию достижений личности.

Время, цель и формы проведения контроля, аттестации по дополнительной общеразвивающей программе представлены в таблице 2.

Таблица 2

Время, цель и формы проведения контроля, аттестации

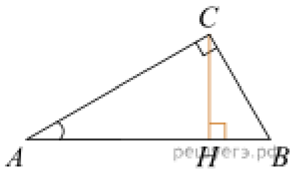
Время проведения	**Цель проведения**	**Форма контроля, аттестации**
	Начальный или входной контроль	
В начале учебной программы	Определение уровня развития обучающегося, его способностей	Педагогическое наблюдение. Опрос.
	Текущий контроль	
В течение всей учебной программы	Определение степени усвоения обучающегося учебного материала. Определение готовности обучающегося к восприятию нового материала. Повышение ответственности и заинтересованности обучающегося в обучении. Подбор наиболее эффективных методов и средств обучения	Педагогическое наблюдение. Опрос.
В конце учебной программы	Определение изменения уровня развития обучающегося его творческих способностей. Определение результатов обучения. Ориентирование обучающегося на дальнейшее обучение. Получение сведений для совершенствования общеобразовательной программы и методов обучения.	Педагогическое наблюдение. Опрос.

3.1. Примеры типовых заданий и иных материалов, используемых для оценки результатов обучения, в зависимости от выбранных тем.

Пример:

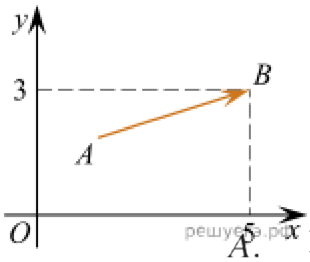
3.1. Типовые вопросы, задания в рамках входного контроля (при наличии)

1



В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, $BC = 1$, $\sin A = \dfrac{2}{5}$. Найдите *AH*.

2.



Вектор $\overrightarrow{AB}$ с концом в точке $B(5;\ 3)$ имеет координаты $(3;\ 1)$. Найдите ординату точки A.

3.

Площадь боковой поверхности пятиугольной пирамиды равна 13. Чему будет равна площадь боковой поверхности пирамиды, если все ее ребра уменьшить в 2 раза?

4.

Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

5.

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

6.

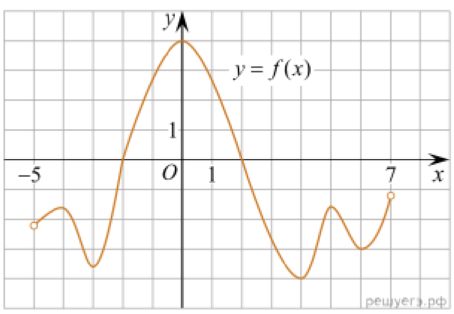
Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}=\dfrac{1}{7}$.

7.

Найдите значение выражения $\dfrac{8^{\sqrt{5}}\cdot 3^{\sqrt{5}}}{24^{\sqrt{5}-2}}$.

8.

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1;\ 6{,}5]$.



9.

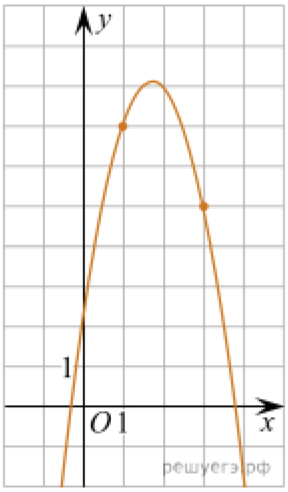
Груз массой 0,4 кг колеблется на пружине. Его скорость υ меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 16$ с — период колебаний, $\upsilon_0 = 1,9$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, υ — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 6 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

10.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 9 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Найдите $f(-3)$.



12.

Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 13x^2 - 9x + 2$.

13.

а) Решите уравнение $4\sin^2\left(x + \frac{7\pi}{8}\right) + \sqrt{2}\sin 2x = 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

14.

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

15.

Решите неравенство: $\dfrac{2^x+8}{2^x-8}+\dfrac{2^x-8}{2^x+8}\geqslant\dfrac{2^{x+4}+96}{4^x-64}.$

16.

Билл несколько лет назад вложил деньги в акции некоего предприятия. Ежегодно он получал прибыль по акциям сначала $9\dfrac{1}{11}$% в год, потом 37,5% в год и, наконец, $6\dfrac{2}{3}$% в год и сразу же вкладывал деньги в те же акции. Известно, что одинаковые процентные ставки сохранялись равное число лет, в результате стоимость акций увеличилась на 156%. Определите, сколько лет Билл получал прибыль по акциям.

17.

В параллелограмме $ABCD$ расположены две равные непересекающиеся окружности. Первая касается сторон AD, AB и BC, вторая — сторон AD, CD и BC.

а) Докажите, что общая внутренняя касательная l окружностей проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

б) Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а прямая l касается окружностей в точках M и N. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках M, N и в центрах окружностей, если $AD = 36$, а расстояние между центрами окружностей равно 20.

18.

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(2x-x^2\right)^2-4\sqrt{2x-x^2}=a^2-4a.$$

имеет хотя бы один корень.

19.

По кругу в некотором порядке по одному разу написаны натуральные числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

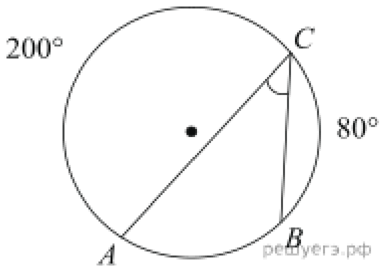
в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Критерии оценивания

стартовый (ознакомитель-ный	базовый	углубленный (продвинутый)
0-30%	30-60%	60-100%

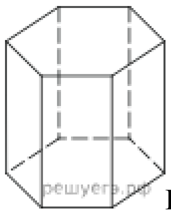
3.2Типовые вопросы, задания в рамках текущего контроля

1.



Дуга окружности *AC*, не содержащая точки *B*, составляет 200°. А дуга окружности *BC*, не содержащая точки *A*, составляет 80°. Найдите вписанный угол *ACB*. Ответ дайте в градусах.

2.



Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}.$

3.

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений − по одному от каждой страны. В первый день 36 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Каковы вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

4.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

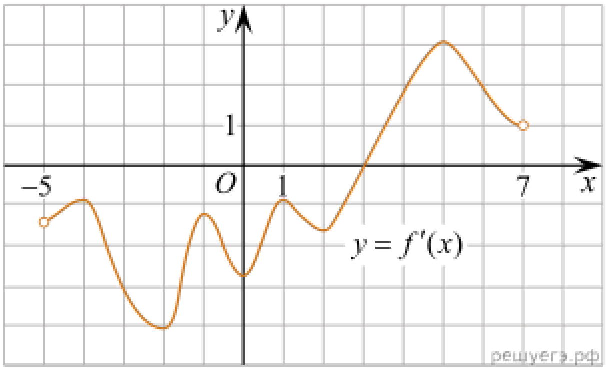
5.

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47)=3.$

6.

Найдите значение выражения $\dfrac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}.$

7.



На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;\ 4]$.

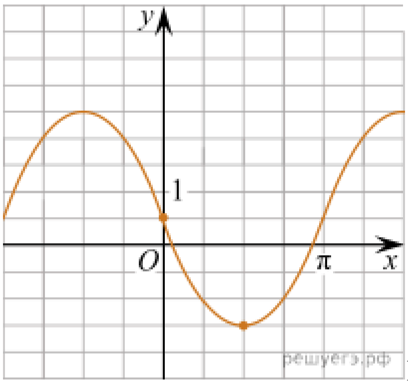
8

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 28 с. Ответ дайте в киловольтах.

9.

Расстояние между городами *A* и *B* равно 150 км. Из города *A* в город *B* выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе *C* и повернул обратно. Когда он вернулся в *A*, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от *A* до C. Ответ дайте в километрах.

10.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите *a*.

11

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\ln(x + 11) + 7$ на отрезке $[-10{,}5; 0]$.

12.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

13.

Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра O основания конуса до плоскости сечения.

14.

Решите неравенство $\left(\frac{1}{x^2-9x+18}-\frac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x^3-11x^2+30x}\leqslant 0.$

15.

1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

16

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

17.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right)\leqslant 0, \\ y=ax+a+3 \end{cases}$$

не имеет решений.

18.

Известно, что a, b, c, d, e и f — это числа 2, 3, 4, 5, 6 и 8, расставленные без повторений в некотором, возможно ином, порядке.

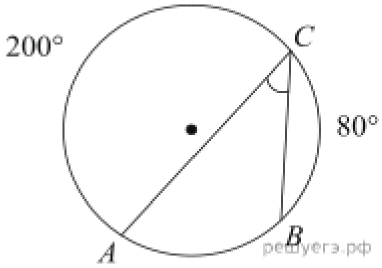
а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{13}{2}$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{481}{120}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

Ответы и решения.

1.



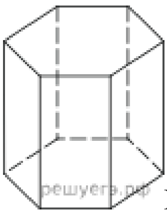
Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 200°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

Решение. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2}(360^\circ - \cup AC - \cup CB) =$$
$$= \frac{1}{2}(360^\circ - 280^\circ) = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

2.



Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

Решение. Объем прямой призмы равен $V = Sh$, где S — площадь основания, а h — боковое ребро. Площадь правильного шестиугольника со стороной a, лежащего в основании, задается формулой

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда объем призмы равен

$$V = Sh = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

3.

Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений − по одному от каждой страны. В первый день 36 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Каковы вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение. На третий день запланировано $\frac{60-36}{2} = 12$ выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна

$$\frac{12}{60} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

4.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 12 задач, равна 0,7. Вероятность того, что П. верно решит больше 11 задач, равна 0,79. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 12 задач.

Решение. Рассмотрим события A = «учащийся решит 12 задач» и В = «учащийся решит больше 12 задач». Их сумма — событие A + B = «учащийся решит больше 11 задач». События A и В несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: 0,79 = P(A) + 0,7, откуда P(A) = 0,79 − 0,7 = 0,09.

Ответ: 0,09.

5.

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47) = 3.$

Решение. Последовательно получаем:

$$\log_8(5x+47) = 3 \Leftrightarrow 5x+47 = 8^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x+47 = 512 \Leftrightarrow x = 93.$$

Ответ: 93.

6.

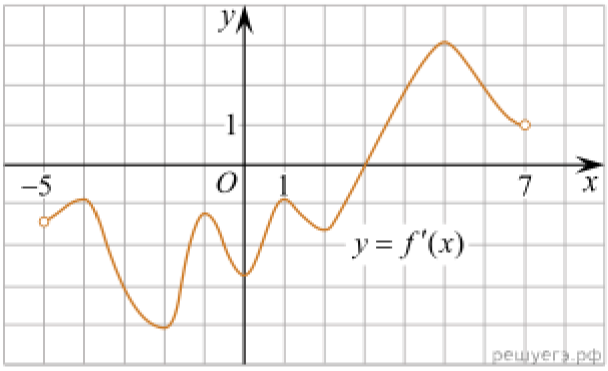
Найдите значение выражения $\frac{\left(5a^2\right)^3 \cdot (6b)^2}{\left(30a^3b\right)^2}.$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{\left(5a^2\right)^3 \cdot (6b)^2}{\left(30a^3b\right)^2} = \frac{5^3a^6 \cdot 6^2b^2}{30^2a^6b^2} = \frac{5^3 \cdot 6^2}{5^2 \cdot 6^2} = 5.$$

Ответ: 5.

7.



На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-1;\ 4]$.

Решение. Если производная в некоторой точке равна нулю, а в ее окрестности меняет знак, то это точка экстремума. На интервале [–1; 4] график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, точка 3 является точкой экстремума.

Ответ: 3.

8.

В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Определите (в киловольтах), наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 28 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $t \geqslant 28$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ, сопротивления резистора $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geqslant 28 \Leftrightarrow 1{,}4 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{6} \cdot \log_2 \frac{12}{U} \geqslant 28 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{12}{U} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{12}{U} \geqslant 2 \Leftrightarrow U \leqslant 6 \text{ кВ.}$$

Ответ: 6.

9.

Расстояние между городами *A* и *B* равно 150 км. Из города *A* в город *B* выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе *C* и повернул обратно. Когда он вернулся в *A*, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от *A* до C. Ответ дайте в километрах.

Решение. Обозначим *S* км — расстояние от *A* до *C*, υ км/ч — скорость автомобиля, *t* ч — время движения мотоциклиста от *A* до *C*. Тогда $\left(t + \frac{1}{2}\right)\upsilon = 90t$ и $\left(2t + \frac{1}{2}\right)\upsilon = 150.$ Решим систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} \left(t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 90t, \\ \left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(t+\frac{1}{2}\right)\upsilon}{\left(2t+\frac{1}{2}\right)\upsilon} = \dfrac{90t}{150} \\ \left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 150 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2t+1}{2t+\frac{1}{2}} = \dfrac{6t}{5}, \\ \left(2t+\dfrac{1}{2}\right)\upsilon = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ \upsilon = 60. \end{cases}$$

Тогда $S = 90t = 90$ км.

Ответ: 90.

Приведём другой способ решения.

Обозначим υ км — скорость автомобиля. В момент выезда мотоциклиста между автомобилем и мотоциклом было 0,5υ км, и мотоциклист догонит автомобиль в городе *C* за $\dfrac{0,5\upsilon}{90-\upsilon}$ ч. За это же время мотоцикл вернётся в *A*, а автомобиль доедет до *B*.

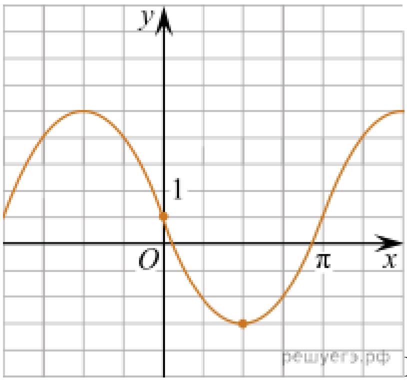
Всего автомобиль затратит времени $2\cdot\dfrac{0,5\upsilon}{90-\upsilon}+0,5.$ За это время он со скоростью υ проедет 150 км. Получим уравнение:

$$\left(\frac{\upsilon}{90-\upsilon}+0,5\right)\cdot\upsilon = 150 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5\upsilon^2+45\upsilon = 150\cdot 90 - 150\upsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \upsilon^2+390\upsilon - 300\cdot 90 = 0.$$

Положительный корень уравнения $\upsilon = 60.$ Тогда мотоцикл затратит на дорогу до *C* $\dfrac{30}{30} = 1$ час, а поскольку его скорость равна 90, то расстояние до *C* равно 90 км.

Ответ: 90.

10.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a\sin x + b.$ Найдите *a*.

Решение. По графику, $f(0) = 0,5,$ тогда

$$a \cdot \sin 0 + b = 0{,}5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 0{,}5 \Leftrightarrow b = 0{,}5.$$

Далее, по графику, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1{,}5$, тогда

$$a \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 0{,}5 = -1{,}5 \Leftrightarrow a \cdot 1 + 0{,}5 = -1{,}5 \Leftrightarrow a = -2.$$

Ответ: −2.

11.

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9\ln(x+11) + 7$ на отрезке $[-10{,}5;\,0]$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 9 - \frac{9}{x+11}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 9 - \dfrac{9}{x+11} = 0, \\ -10{,}5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ -10{,}5 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -10.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение

функции:

В точке $x = -10$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

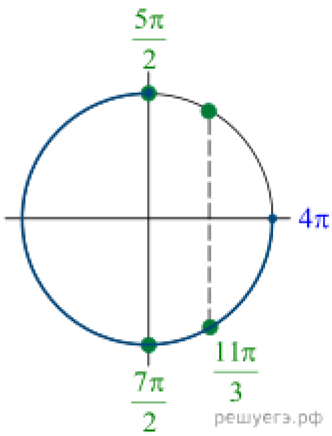
$$y(-10) = -9 \cdot 10 - 9\ln 1 + 7 = -83.$$

Ответ: −83.

12.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.



Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Отберем корни при помощи единичной тригонометрической окружности (см. рис.). На заданном отрезке лежат корни $\dfrac{5\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{2},\ \dfrac{11\pi}{3}.$

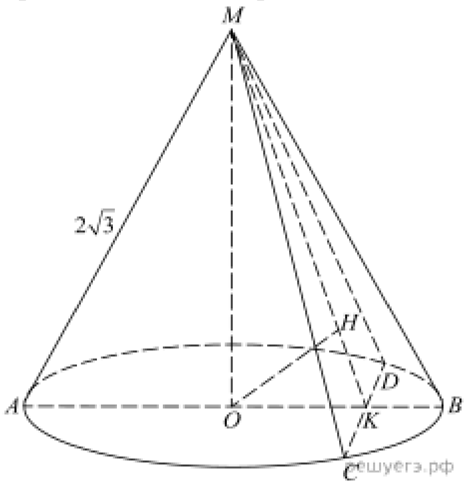
Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\};$ б) $\dfrac{5\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{2},\ \dfrac{11\pi}{3}.$

13.

Дан прямой круговой конус с вершиной *M*. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине *M*. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}.$ Через точку *M* проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник — тупоугольный.

б) Найдите расстояние от центра *O* основания конуса до плоскости сечения.



Решение. а) Пусть *AB* — диаметр окружности, *MO* — высота конуса, и пусть плоскость сечения перпендикулярна образующей *AM* и пересекает основание по хорде *CD*. Прямая *AM* лежит в плоскости *AMB* и перпендикулярна хорде *CD*. Прямая *MO* лежит в плоскости *AMB* и перпендикулярна хорде *CD* как высота конуса, следовательно, плоскость *AMB* перпендикулярна прямой *CD*, а значит, диаметр *AB* перпендикулярен хорде *CD*. Пусть *K* — точка их пересечения. Заметим, что образующие *MA*, *MB*, *MC* и *MD* равны $2\sqrt{3};$ угол *AMB* равен 120°, откуда получаем, что углы *MAB* и *MBA* равны по 30°, следовательно, $MO=\sqrt{3}.$

Из теоремы Пифагора следует, что в прямоугольных треугольниках *AMO* и *BMO* катеты *AO* и *BO* равны 3, значит, диаметр *AB* равен 6. Рассмотрим треугольник *AMK*: он прямоугольный, так как прямые *AM* и *MK* перпендикулярны, с острым углом *MAK*, который равен 30°. Таким образом, $AK = 2MK = 2x$. Найдем *x* по теореме Пифагора для этого треугольника:

$$4x^2=x^2+(2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 3x^2=12 \Leftrightarrow x=2.$$

Рассмотрим теперь треугольник *MCD*, полученный в сечении. Он равнобедренный, в нем стороны *MC* и *MD* равны $2\sqrt{3};$ а высота *MK* равна 2. Таким образом,

$$KD = \sqrt{MD^2 - MK^2} = \\ = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

значит, $CD = 4\sqrt{2}.$

В треугольнике MCD:

$$MC^2 + MD^2 = 2 \cdot (2\sqrt{3})^2 = \\ = 24 < 32 = (4\sqrt{2})^2 = CD^2.$$

Таким образом, получаем, что треугольник MCD — тупоугольный.

б) В плоскости MAB из точки O опустим перпендикуляр OH на прямую MK. Так как прямая CD перпендикулярна плоскости MAB, то прямые OH и CD перпендикулярны и, следовательно, OH является искомым расстоянием. Заметим, что $AK = 2MK = 4$, а $OK = AK - AO = 1$. Вычислим площадь треугольника MOK двумя способами:

$$S_{MOK} = \frac{1}{2} MK \cdot OH = \frac{1}{2} MO \cdot OK \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow OH = \frac{MO \cdot OK}{MK} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

14.

Решите неравенство $\left(\frac{1}{x^2 - 9x + 18} - \frac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x^3 - 11x^2 + 30x} \leqslant 0.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{1}{(x-3)(x-6)} - \frac{x-3}{6-x}\right)\sqrt{x(x^2 - 11x + 30)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 + (x-3)^2}{(x-3)(x-6)} \cdot \sqrt{x(x-5)(x-6)} \leqslant 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. При условии $(x-3)(x-6) \neq 0,$ выражение $x(x-5)(x-6) = 0,$ откуда $x = 0$ или $x = 5$.

2. При условии $x(x-5)(x-6) > 0,$ выражение $\frac{1 + (x-3)^2}{(x-3)(x-6)} \leqslant 0,$ то есть $(x-3)(x-6) < 0.$ Получаем $3 < x < 5.$

Таким образом, решение неравенства: $\{0\} \cup (3; 5].$

Ответ: $\{0\} \cup (3; 5].$

15.

1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

Решение. Если первый платеж банку Аркадия составил x рублей, то второй составит $2x$ рублей, а третий — $3x$ рублей, всего $6x$ рублей, что равно 2 395 800, то есть $x = 2\,395\,800 : 6 = 399\,300$. Отсюда: $2x = 798\,600$, $3x = 1\,197\,900$.

Пусть в банке Аркадий взял в кредит S рублей.

Тогда его долг 01.03.2011 составил $1{,}1S$ рублей. После первого перечисления Аркадия долг снизился до $(1{,}1S-399\,300)$ руб.

01.03.2012 банк начислил проценты на долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}1S-399\,300)\cdot 1{,}1=1{,}21S-439\,230$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 798 600 руб. Долг снизился до $1{,}21S-439230-798600=1{,}21S-1237830$ (руб.)

01.03.2013 банк начислил проценты на оставшийся долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}21S-1237830)\cdot 1{,}1=1{,}331S-1\,361\,613$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 1 197 900 руб. Кредит погашен полностью, долга у Аркадия нет.

Значит, $1{,}331S-1\,361\,613-1\,197\,900=0 \Leftrightarrow 1{,}331S=2\,559\,513 \Leftrightarrow S=1\,923\,000$.

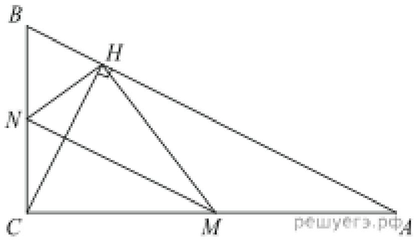
Ответ: 1 923 000 рублей.

16.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH=4$ и $BH=2$.

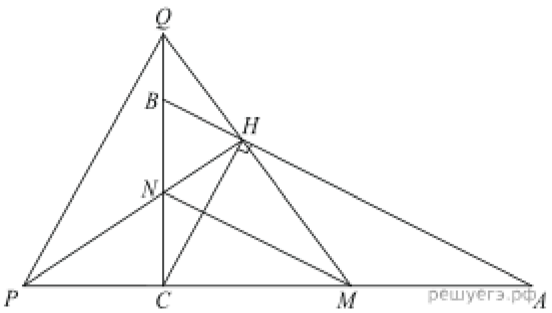


Решение. а) Треугольники AHC и BHC прямоугольные (рис. 1), поэтому $MH=\dfrac{AC}{2}=CM$ и $NH=\dfrac{CB}{2}=CN.$ Значит, треугольники MCN и MHN равны по трём сторонам, откуда $\angle MHN=\angle MCN=90^\circ.$

б) В прямоугольном треугольнике ABC имеем: $CH=\sqrt{AH\cdot BH}=2\sqrt{2}$ (рис. 2).

В прямоугольном треугольнике MHP и MCQ с общим углом CMH получаем:

$$\frac{MH}{MP}=\frac{MC}{MQ}=\cos\angle CMH,$$



поэтому треугольники MHC и MPQ подобны с коэффициентом подобия $\cos\angle CMH.$

Площадь S треугольника MHC равна половине площади треугольника AHC, то есть $S=\dfrac{AH\cdot CH}{4}=2\sqrt{2}.$

Найдём $\cos\angle CMH$:

$$\cos\angle CMH=\cos(2\angle CAH)=$$
$$=2\cos^2\angle CAH-1=\frac{2AH^2}{AC^2}-1=\frac{2AH^2}{AH^2+CH^2}-1=\frac{1}{3}.$$

Значит, площадь треугольника *MPQ* равна $\dfrac{S}{\cos^2 \angle CMH} = 18\sqrt{2}.$

Ответ: б) $18\sqrt{2}.$

Площадь треугольника *PQM* равна половине произведения *QC* на *PM*. Для того, чтобы определить длины данных отрезков, можно два раза применить теорему Менелая к треугольнику *ABC*, заметив предварительно, что $CH = 2\sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{6}$ и $BC = 2\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}+CP}{CP} = 1 \text{ и } \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2\sqrt{3}+BQ}{BQ} = 1,$$

откуда: $CP = 2\sqrt{6}$, $BQ = 2\sqrt{3}$. Тогда $PM = 3\sqrt{6}$, $QC = 4\sqrt{3}$, следовательно,

$$S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 18\sqrt{2}.$$

Приведем решение пункта б)

Проведем отрезок *AQ*, получим треугольник *ACQ*, в котором *QM* будет медианой, а отрезок *AB* будет пересекать медиану в точке *H* и разбиваться этой точкой на отрезки длинной 4 и 2, считая от вершины *A*. Следовательно, *AB* тоже медиана, тогда *CB* = *BQ*, а треугольник *MPQ* равнобедренный с равными сторонами *HQ* и *CP*.

В треугольнике *ACQ* отрезки *QM* и *AB* медианы, значит, $QH = 2MH = 2CM = AC = \sqrt{AH \cdot AB} = 2\sqrt{6}$, и $CB = BQ = \sqrt{BH \cdot AB} = 2\sqrt{3}$. В равнобедренном треугольнике *MPQ* имеем: $HQ = CP = \sqrt{6}$. Тогда для площади треугольника *MPQ* получаем:

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2}CQ \cdot MP =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}.$$

17.

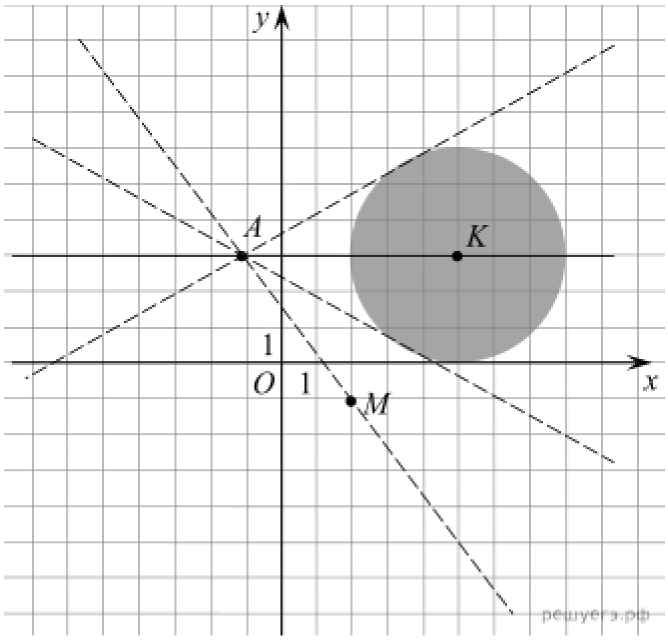
Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right) \leqslant 0, \\ y = ax+a+3 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Уравнение $y = ax + a + 3$ задает прямую. Эта прямая при всех *a* проходит через точку $A(-1;3)$.

Неравенство системы $\left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right) \leqslant 0$ задает объединение круга с центром в точке $K(5;3)$ и радиусом 3 и точки $M(2;-1)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y = ax + a + 3$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M.



Расстояние между точками $A(-1;3)$ и $K(5;3)$ равно $6,$ а радиус круга равен $3,$ значит, касательные к кругу проведённые из точки $A(-1;3),$ образуют углы $\frac{\pi}{6}$ с прямой $AK.$ Этим касательным соответствуют значения $a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Прямая *AM* имеет угловой коэффициент $-\frac{4}{3}.$

Отсюда получаем $a<-\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{\sqrt{3}};\ a>\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right).$

18.

Известно, что *a, b, c, d, e* и *f* — это числа 2, 3, 4, 5, 6 и 8, расставленные без повторений в некотором, возможно ином, порядке.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{13}{2}$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{481}{120}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

Решение. а) Пусть $a=6, b=3, c=8, d=4, e=5$ и $f=2.$ Тогда

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=2+2+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}.$$

б) Предположим, что это возможно. Дробь $\frac{481}{120}$ несократима и больше 4. Значит, наименьшее общее кратное знаменателей *b*, *d* и *f* дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ делится на 120. Поэтому числа *b*, *d* и *f* — это либо числа 3, 5 и 8, расставленные без повторений в некотором порядке, либо числа 5, 6 и 8, расставленные без повторений в некотором порядке. В первом случае сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ меньше, чем $\frac{6}{3}+\frac{6}{5}+\frac{6}{8}=\frac{79}{20}<4$; во втором — меньше, чем $\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{8}<4.$ Пришли к противоречию.

в) Пусть числа *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* таковы, что сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ принимает наименьшее возможное значение. Если знаменатели *b*, *d* и *f* дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ — это не расставленные в некотором порядке числа 5, 6 и 8, то сумму $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ можно уменьшить, поменяв местами то из чисел 5, 6 или 8, которое попало в числитель, с тем из чисел 2, 3 или 4, которое попало в знаменатель. Далее без ограничения общности считаем, что $b=5, d=6$ и $f=8.$

Пусть *k*, *l*, *m* и *n* — какие-либо положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $k<m$ и $l<n.$ Тогда

$$\left(\frac{m}{l}+\frac{k}{n}\right)-\left(\frac{k}{l}+\frac{m}{n}\right)=(m-k)\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{n}\right)>0$$

и, следовательно, $\frac{m}{l}+\frac{k}{n}>\frac{k}{l}+\frac{m}{n}.$ Поэтому если числители *a*, *c* и *e* дробей $\frac{a}{b}=\frac{a}{5}; \frac{c}{d}=\frac{c}{6}$ и $\frac{e}{f}=\frac{e}{8}$ не идут в порядке возрастания, то сумму $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ можно уменьшить, поменяв между собой те из этих числителей , которые
идут в порядке убывания. Следовательно, наименьшее возможное значение суммы $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ равно $\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}=\frac{7}{5}.$

Ответ: а) Да; б) нет; в) $\frac{7}{5}.$

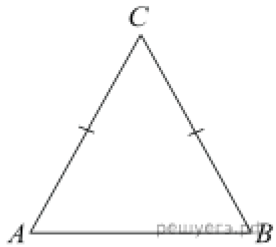
1. Задание

Решите уравнение $\frac{5}{14}x^2=4\frac{3}{8}.$ Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

2.

В сборнике билетов по химии всего 40 билетов, в 20 из них встречается вопрос теме "Соли". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме "Соли".

3.

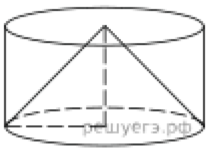


В треугольнике ABC угол C равен $76°$, $AC = BC$. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

4.

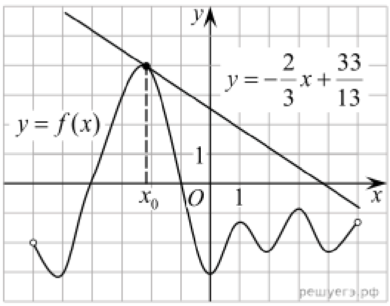
Найдите значение выражения $(\sqrt{75} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{12}.$

5.



Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}.$ Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

6.



На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0.

7.

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от −2 до 2.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

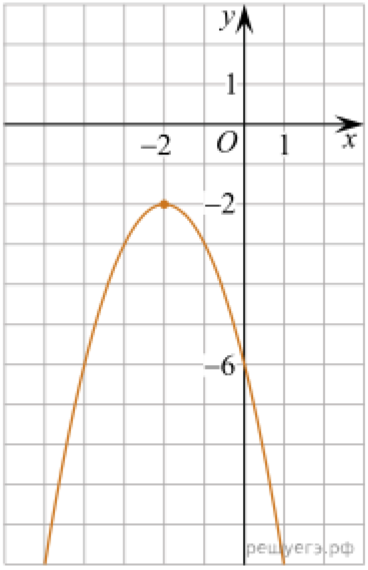
$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

8.

Первые 140 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 160 км — со скоростью 60 км/ч, а затем 120 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

9.



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа *a*, *b* и *c* — целые. Найдите значение $f(3)$.

10.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

11.

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 147x + 11.$

12.

а) Решите уравнение $\sin^2 2x = \cos 2x + 4\sin^4 x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

13.

В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 4. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды *MABC* является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *MABC* плоскостью α.

14.

Решите неравенство $\dfrac{\log_3(9x) - 13}{\log_3^2 x + \log_3 x^4} \leqslant 1.$

15.

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

16.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём диаметром окружности является его диагональ AC. Также известно, что в $ABCD$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

б) Найдите радиус вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 26$ и $BD = 24$.

17

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |a + 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

18.

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

4.1 Используемые образовательные технологии

Предметно-ориентированные технологии

4.2 Литература

Основная литература по дисциплине:

Литература и электронные ресурсы *(интернет-ресурсы и др.).*

1. Бурмистрова Т.А. Геометрия. 10 - 11 классы. Программы общеобразовательных учреждений. - М., «Просвещение», 2010.
2. Геометрия. Дидактические материалы. 11 класс / Б.Г.Зив. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2009.
3. Дорофеев Г. В. и др. Оценка качества подготовки выпускников средней (полной) школы по математике. - М., «Дрофа», 2002.
4. Ершова А.П., Голобородько В.В., Ершова А.С. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 11 класса.- 4-е издание, испр. и доп.- М.: Илекса, 2007,- 175 с.
5. Изучение геометрии 10-11 кл.: книга для учителя / С.М.Саакян, В.Ф. Бутузов. – М.: Просвещение, 2010.
6. Настольная книга учителя математики: Справочно-методическое пособие/Сост. Л.О.Рослова.– М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2004.– 429 с.
7. Федеральный компонент государственного стандарта среднего (полного) общего образования по математике / «Вестник образования» - 2004 - № 14 - с.107-119.
8. Яровенко В.А.. Поурочные разработки по геометрии 11 класс: кн. для учителя. – М.: «ВАКО», 2010.
9. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 11 кл. общеобразоват. учреждений /С.М. Никольский и др.- М.: Просвещение, 2009.
10. Методические рекомендации к учебникам математики для 10-11 классов, журнал «Математика в школе» №2-2005год;
11. Настольная книга учителя математики. М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2004;

12. Потапов М.К., А.В.Шевкин «Алгебра и начала математического анализа 11»,дидактические материалы, М., издательство «Просвещение» 2009г.

13. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 11 кл. общеобразоват. учреждений /С.М. Никольский и др.- М.: Просвещение, 2009.

14. Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Э.Г. Полозняк **Геометрия** Учебник для 10-11 классов.– М.: Просвещение, 2006.

Электронные ресурсы:

Портал https://ege.sdamgia.ru/