

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы теории вероятностей

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

Бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

Очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2023 г.

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений.

Код дисциплины **Б1.В.ДВ.07.04.**

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.07.04 «Дополнительные главы теории вероятностей» относится к части ООП направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» , формируемой участниками образовательных отношений.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-3.: Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	ПК-3.1.: Знает методы сбора, обработки и интерпретации данных современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Знать: постановки задач и основные закономерности построения математических стохастических моделей; -терминологию теории вероятностей и математической статистики, основными теоретическими подходами и прикладными методами, позволяющими получить решение задач прикладной теории вероятностей; -навыки применения полученных знаний при анализе конкретных математических моделей; -навыки разработки необходимых алгоритмов численного моделирования.	Собеседование
	ПК-3.2.: Умеет собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Уметь: находить параметры стохастических моделей, стационарные режимы систем и области их существования в пространстве параметров на основе применения методов и приемов качественно-численного исследования, -планировать вычислительный эксперимент на ЭВМ, -давать физическую интерпретацию полученным результатам на примерах анализа стохастических моделей; -профессионально разрабатывать и использовать программное обеспечение для принятия	Контрольная работа

		статистических решений, когда процесс имеет случайный характер, проводить процедуры тестирования информационных систем.	
	ПК-3.3. Имеет практический опыт сбора и обработки данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Владеть: современными инструментальными методами теории вероятностей и математической статистики.	Контрольная работа

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	34
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	38
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы) Очная	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы Очная
		Занятия лекционного типа Очная	Занятия семинарского типа Очная	Занятия лабораторного типа Очная	Всего Очная	
Тема 1. Случайные величины и их вероятностные распределения 1.1. Случайные величины и векторы. Распределения дискретных величин. 1.2. Распределения непрерывных величин. 1.3. Математические ожидания. 1.3. Теоремы о предельном переходе под знак математического ожидания.	10	2	2		4	6
Тема 2. Условные распределения и условные математические ожидания. 2.1. Условные распределения дискретных и непрерывных величин. 2.2. Условные математические ожидания.	10	2	2		4	6

Тема 3. Функции случайных величин и их распределения. 3.1. Взаимно-однозначная функция и ее распределение. 3.2. Распределение суммы независимых величин. Хи-квадрат распределение. 3.3. Распределение частного независимых величин. Распределение Стьюдента и Фишера. 3.4. Проверка модели о типе распределения по малым выборкам.	18	4	4		8	10
Тема 4. Предельные теоремы для независимых с.в. и модели теории вероятностей 4.1. Слабые и усиленные законы больших чисел. 4.2. Центральные теоремы для независимых с.в.: Леви, Феллера, Ляпунова. Устойчивые распределения: применение в экономике. 4.3. Применение калькулятора обратного нормального распределения. 4.4. Предельные теоремы для экстремальных статистик. Применение к построению моделей теории вероятностей. Гистограмма и э.ф.р.	16	4	4		8	8
Тема 5. Построение моделей теории вероятностей для зависимых случайных величин. Марковские цепи. 5.1. Цепи Маркова с дискретным временем. Переходные вероятности. Примеры. 5.2. Эргодические теоремы и распределение экстремальных статистик для неоднородных и зависимых величин. Расчет статистических характеристик. 5.3. Применение марковских цепей и экстремальных статистик. Вероятностные модели роста.	16	4	4		8	8
Текущий контроль (КСР)	2				2	
Промежуточная аттестация – экзамен	36					
Итого	108	16	16		34	38

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Исследование операций» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к экзамену.

Тематика самостоятельной работы:

- Самостоятельная работа «Случайные величины и их вероятностные распределения»
- Самостоятельная работа «Условные распределения»
- Самостоятельная работа «Функции случайных величин»
- Самостоятельная работа «Предельные теоремы»

- Самостоятельная работа «Построение вероятностных моделей с использованием гистограмм и эмпирических функций распределения, адекватность моделей – с помощью критериев»
- Самостоятельная работа «Марковские цепи: классификация состояний и расчет статистических характеристик»

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность	При решении стандартных задач не продемонстрированы	Имеется минимальный набор навыков для	Продemonстрированы базовые навыки при	Продemonстрированы базовые навыки при	Продemonстрированы навыки при решении	Продemonстрирован творческий подход к

	ть оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	ированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	решении стандартных задач с некоторыми недочетами	решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	нестандартных задач без ошибок и недочетов.	решению нестандартных задач.
--	---	---	--	---	---	---	------------------------------

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Функции случайных величин и векторов. Взаимно-однозначная функция и ее распределение.	ПК-3
2. Композиция (свертка) случайных величин.	ПК-3
3. Распределение Релея и Райса. Распределение Мизеса. Распределение амплитуды и фазы океанских волн.	ПК-3
4. Логистическое распределение как свертка распределений экстремальных порядковых статистик.	ПК-3
5. Кривые Пирсона в построении вероятностных моделей.	ПК-3

6. Гистограмма и эмпирическая функция распределения.	ПК-3
7. Предельные распределения для экстремальных порядковых статистик. Распределение Вейбулла (распределение слабого звена). Распределение Гнеденко и Парето. Распределение максимальных высот волн.	ПК-3
8. Смесь распределений. Отрицательное биномиальное распределение как смесь.	ПК-3
9. Интегральная геометрия. Распределение расстояния в круге. Проверка гипотез о распределении полезных ископаемых.	ПК-3
10. Проверка гипотез по многим малым выборкам. Геологическая статистика.	ПК-3
11. Распределение частного независимых величин. Распределение Стьюдента и Фишера.	ПК-3
12. Логарифмическое распределение. Современные подходы к проверке гипотез о количестве и разнообразии биологических типов по экологическим данным.	ПК-3
13. Центральные теоремы для независимых с.в.: Леви, Феллера, Ляпунова. Задача о конкуренции.	ПК-3
14. Устойчивые распределения: применение в экономике.	ПК-3
15. Обратное нормальное распределение. Распределение Вальда.	ПК-3
16. Цепи Маркова с дискретным временем. Переходные вероятности. Примеры.	ПК-3
17. Эргодические теоремы и распределение экстремальных статистик для неоднородных и зависимых величин. Расчет статистических характеристик.	ПК-3
18. Применение марковских цепей и экстремальных статистик.	ПК-3
19. Вероятностные модели роста. Логарифмически нормальное распределение.	ПК-3
20. Случайные величины, реализующие достижение заданного размера. Распределение Бирнбаума-Сондерса.	ПК-3

5.2.2. Типовые варианты контрольных работ для оценки сформированности компетенции ПК-3

Контрольная работа №1

Вариант 1.

Рассматривается ряд распределения остаточного удлинения болтового железа (%):

x_i (%) 26 28 30 32 34 36 38 40 42

m_i (сколько раз наблюдалось) 1 6 27 40 54 45 23 7 2

Источник: Беккер, Р., Плаут, Г., Рунге, И. Математическая статистика в применении к проблемам массового производства, М.: Гостехиздат, 1933. - 120 с., с.25 .,

т.е. имеется повторная выборка x_1, x_2, \dots, x_n объема $n = 205$ из неизвестного непрерывного распределения $F(x)$, где x_i – остаточное удлинение железа.

Контрольная работа №2

Вариант 1.

1. Пусть

$$a_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, a_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}, \theta_1, \theta_2 > 0$$

и

$$P(X = m) = a_1 \frac{\theta_1^{-m}}{m!} e^{-1/\theta_1} + a_2 \frac{\theta_2^{-m}}{m!} e^{-1/\theta_2}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Используя выборку x_1, x_2, \dots, x_n найти оценки параметров θ_1, θ_2 по методу моментов. Найти значение этой оценки, если

$n = 15$, а выборка равна 5, 4, 4, 2, 0, 0, 2, 1, 1, 3, 2, 4, 1, 2, 0.

2. Пусть X_1, X_2, \dots, X_N – независимые случайные величины, причем

$$P(X_i = m) = C_{n_i}^m p^m (1-p)^{n_i-m}, m = 0, 1, \dots, n_i; 0 < p < 1; i = 1, 2, \dots, N.$$

Найдите оценку максимального правдоподобия по выборке $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_N, m_N), n_i$ – неслучайны, $i = 1, 2, \dots, N$.

Критерии оценок выполнения контрольной работы

(каждая задача оценивается в 2 балла)

Решена полностью	2
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	1,5
Решена задача наполовину	1
Сделан первый этап в решении задачи	0,5
Нет решения	0

Суммарная оценка выполнения контрольной работы

Количество баллов	Оценка
4	Отлично
3,5	Очень хорошо
3	Хорошо
2-2,5	Удовлетворительно
0,5-1,5	Неудовлетворительно
0	Плохо

5.2.3. Типовые вопросы для собеседования для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. Что такое случайная величина?
2. Привести примеры основных распределений случайных величин и векторов.

3. Дать определение математического ожидания. Всегда ли существует математическое ожидание. Привести примеры.
4. Когда возможен предельный переход под знак математического ожидания.
5. Определить условные распределения дискретных и непрерывных величин. Всегда ли можно определить условные распределения.
6. Дать определение условного математического ожидания. Когда существует условное математическое ожидание?

Вопросы по теме "Случайные величины и условные вероятностные распределения" и ответы на них.

1. Случайные величины и векторы. Условные распределения.
Дает определение случайной величины, приводит некоторые примеры. Умеет находить условные распределения для дискретных или непрерывных величин.
2. Математическое ожидание и условное математическое ожидание (регрессии).
Умеет подсчитать условное математическое ожидание для дискретной случайной величины. Знает вид регрессии для совместных нормальных величин.

Вопросы по теме "Функции случайных величин" и ответы на них.

3. Основные функции случайных величин.
Умеет применять формулу замены переменных для плотности случайной величины. Знает, когда неравенства будут экспоненциальными и что это дает. Понимает, что из основных неравенств следует сходимость по вероятности, а из неравенств для максимумов сумм следует сходимость с вероятностью 1.

Вопросы по теме "Условные распределения" и ответы на них.

4. Определение и свойства условных распределений и условных математических ожиданий.
Дает определение. Понимает, что условное математическое ожидание если оно не константа – регрессия. Знает ее рассчитать. Умеет строить оценки по выборочным данным.

Вопросы по теме "Предельные теоремы теории вероятностей".

5. Центральные теоремы для независимых с.в.: Леви, Феллера, Ляпунова. Задача о конкуренции.
Понимает, в каких случаях имеют место законы больших чисел и что это значит для практики, в частности для выборочного исследования. Понимает, в каких случаях с.в. будет иметь примерно нормальное распределение, а в каких случаях – нет.

Вопросы по теме "Марковские цепи" и ответы на них.

6. Цепи Маркова с дискретным временем. Переходные вероятности. Примеры.
Для конкретных примеров умеет найти матрицу переходных вероятностей. Имеет навыки классификации состояний марковской цепи. Умеет находить стационарные распределения марковской цепи.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Юнити-Дана, 2012 (73 экз)
2. Бикел П.Д., Доксам К. Математическая статистика – М.: Финансы и статистика, 1983 (23 экз)
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика – М.: Высшая школа, 1992 (23 экз.)

б) дополнительная литература:

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов – М.: Физматлит, 2003 (15 экз.)
2. Ширяев А.Н. Вероятность – М.: Наука, 1989 – 640 с. (90 экз)
в) программное обеспечение и интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):
Материалы курса лекций «Современные методы статистического оценивания параметров: эл. издание, 2016», URL: <http://www.unn.ru/books/resources.html> (№1328.16)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Автор: д.ф.-м.н., профессор кафедры ТВиАД Тихов_М.С.

Рецензент: д.т.н., профессор НГТУ им. Р.Е. Алексеева Ломакина Л.С.

Заведующий кафедрой ТВиАД: д.ф.-м.н. Зорин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.