

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Дискретная математика и теория графов

---

Уровень высшего образования

Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность

01.03.03 - Механика и математическое моделирование

---

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.29 Дискретная математика и теория графов относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2: Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3: Владеет навыками работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов	УК-1.1: Знать основные способы синтеза и анализа научной информации; обладать способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции и принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями; иметь представление об основных алгоритмах и методах дискретной математики  УК-1.2: Уметь переводить на математический язык проблемы, поставленные в рамках других предметных областей; приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии; применять на практике основные алгоритмы и методы дискретной математики  УК-1.3: Владеет навыками работы с	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы

		информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов приобретения новых научных и профессиональных знаний.		
ОПК-1: Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук ОПК-1.2: Умеет анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач	ОПК-1.1: Знать основные понятия и утверждения дискретной математики; основные операции над множествами, законы и тождества алгебры множеств; свойства бинарных отношений; теорему о факторизации для отношений эквивалентности; свойства конечных упорядоченных множеств; свойства отображений: инъекцию, сюръекцию, биекцию; понятия счетного множества и множества мощности континуум; основные правила комбинаторики: правила равенства, суммы, произведения, принцип последовательного выбора; основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без повторений, формулы для вычисления их числа; бином Ньютона и треугольник Паскаля; принцип включения-исключения; понятия упорядоченного и неупорядоченного разбиения, формулы для вычисления числа разбиений с заданной спецификацией; общий вид линейного рекуррентного уравнения, формулы для решения линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами первого и второго порядка; основные понятия теории графов: изоморфизм, пути и циклы, связность, шарниры,	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы

		<p>перешейки и блоки, метрические характеристики, каркасы, пространства циклов и разрезов; способы представления графов; важнейшие классы графов: деревья и леса, двудольные графы, планарные графы</p> <p>ОПК-1.2: Уметь решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным: решать уравнения и системы уравнений в алгебре множеств; определять свойства бинарных отношений, строить классы эквивалентности для отношений эквивалентности, диаграммы Хассе для отношений порядка, находить по диаграмме максимальные и минимальные элементы; применять основные правила комбинаторики для подсчета числа комбинаторных объектов, обладающих заданными свойствами; решать линейные рекуррентные уравнения с постоянными коэффициентами первого и второго порядка; выполнять преобразования между различными формами представления графов, находить наиболее рациональные представления для решения различных задач и реализации алгоритмов, строить графовые модели реальных отношений, применять теоретические знания для исследования свойств графов</p> <p>ОПК-1.3: Владеет навыками применения фундаментальных базовых знаний естественнонаучного и</p>		
--	--	--	--	--

		математического циклов при решении стандартных задач дискретной математики и теории графов		
--	--	---	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>4</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>42</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора- торные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
Множества.	12	4	4	8	4
Бинарные отношения.	12	4	4	8	4
Функциональные отношения.	6	2	2	4	2
Комбинаторика.	34	10	10	20	14
Графы	42	12	12	24	18
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	144	32	32	66	42

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Множества. Операции над множествами, их свойства. Диаграммы Венна. Прямое (декартово) произведение множеств. Решение уравнений в алгебре множеств. Множество слов в конечном алфавите.

2. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности, теорема о факторизации. Отношение порядка, максимальный и минимальный элементы упорядоченного множества. Линейный и частичный, лексикографический порядки. Диаграмма Хассе.

3. Функциональные отношения. Инъекция, сюръекция, биекция. Количественное сравнение бесконечных множеств. Счетные множества. Теорема Кантора о существовании несчетных множеств. Множества мощности континуум.

4. Комбинаторика.

Правила равенства, суммы и произведения, принцип последовательного выбора. Перестановки. Размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Их число. Бином Ньютона и треугольник Паскаля.

Упорядоченные разбиения с заданной спецификацией. Полиномиальная теорема. Принцип включения-исключения. Неупорядоченные разбиения. Количество сюръективных отображений. Число беспорядков. Линейные рекуррентные уравнения первого и второго порядка. Алгоритм их решения.

5. Графы. Начальные понятия теории графов. Понятие графа. Типы графов. Способы задания. Подграфы. Пути и циклы. Связность, компоненты, шарниры, перешейки. Перечисление графов. Число помеченных графов. .

Изоморфизм, инварианты. Расстояния и метрические характеристики графов. Вычисление расстояний, эксцентриситетов вершин, радиуса, диаметра, центра графа. Важнейшие классы графов. Деревья, их свойства.

Корневые деревья. Код Прюфера. Двудольные графы, теорема Кенига. Планарные графы, формула Эйлера, критерии планарности. Циклы. Эйлеровы циклы. Критерий существования. Алгоритм построения. Квазициклы.

Пространство циклов. Фундаментальные циклы. Алгоритмы построения базиса циклов.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используются:

- электронный курс ""Дискретная математика"" (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=1683>).

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции УК-1:**

1. Задано универсальное множество  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и в нем подмножества  $A = \{x | x \leq 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 6\}$ ,  $D = \{1, 2, 6, 7\}$ . Найдите множества:  $A \otimes B \bar{C} D$ ;  $C \bar{A} \times (D - B)$ ;  $2^{A \cap C} - 2^{\bar{B}}$
2. Преобразуйте данную формулу в эквивалентную ей, содержащую только операции объединения, пересечения и дополнения и не содержащую скобок:  
 $(B - (C - A)) \otimes \bar{C}$ .
3. Дано отношение  $R$  на множестве  $A$ . Определите, является ли оно симметричным, антисимметричным, транзитивным, отношением эквивалентности, отношением порядка. Для отношения эквивалентности найдите классы эквивалентности, для отношения порядка – минимальные и максимальные элементы.  

$$xRy \Leftrightarrow |x - y|(x - 3)(y - 8) \geq 0;$$
 а)  $A = \{0, 1, 2, 9, 10\}$ ;  
 б)  $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ .

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

1. Дано множество  $U$  из 7 элементов. Каким числом способов в нем можно выбрать три подмножества  $A, B, C$  так, чтобы выполнялись условия:  $|A - B| = 1$ ,  $|B - (A \cup C)| = 4$  ?
2. На одной из кафедр университета работают  $S$  человек, среди которых  $T$  человек не знают ни одного иностранного языка.  $A$  человек знают английский,  $N$  – немецкий,  $F$  – французский.  $AN$  знают английский и немецкий,  $AF$  – английский и французский,  $NF$  – немецкий и французский,  $ANF$  знают все три языка. По заданным в таблице условиям восстановить недостающую информацию.

$S$	$A$	$N$	$F$	$AN$	$AF$	$NF$	$ANF$	$T$
17	11	6	5	4	3	2	1	?

3. Рассматриваются слова в алфавите  $\{a_1, a_2, a_3\}$ . Через  $n_i$  обозначается число вхождений буквы  $a_i$  в слово. Подсчитайте число слов длины 9, удовлетворяющих условию  $n_1 \geq 6$ .
4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «здание», чтобы гласные шли в алфавитном порядке?
5. Решите рекуррентное уравнение с начальными условиями.  

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Приведены правильные решения большинства задач без существенных ошибок

Оценка	Критерии оценивания
не зачтено	Задачи не решены или в решении большинства задач допущены грубые ошибки

## 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач



### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Опишите понятие множества. Чем отличается множество от подмножества? Перечислите способы задания множеств .

2. Сформулируйте определения операций объединения, пересечения, разности, дополнения, симметрической разности

3. Какие операции над множествами обладают свойствами коммутативности и ассоциативности?

4. Сформулируйте дистрибутивные законы для операций объединения и пересечения. Сформулируйте законы де-Моргана.

5. Дайте определение прямого (декартова) произведения множеств.  
Сформулируйте теорему о мощности прямого произведения.

6. Что означает запись для множества  $A$ ? Какова мощность множества всех подмножеств  $n$ -элементного множества?
7. Что значит решить уравнение в алгебре множеств? Может ли уравнение в алгебре множеств иметь более одного решения? Ровно одно решение? Ни одного решения?
8. Дайте определение бинарного отношения. Перечислите свойства бинарных отношений.
9. Какое отношение называется отношением эквивалентности? Приведите пример отношения эквивалентности. Из каких элементов множества образуется класс эквивалентности?
10. Дайте определение разбиения множества. Какое множество называется фактор-множеством по отношению эквивалентности?
11. Какое отношение называется отношением порядка? Приведите пример отношения порядка. Какие характеристики отношения порядка можно определить с помощью диаграммы Хассе?
12. Какой порядок называется линейным? Частичным? лексикографическим?
13. Понятия смежности, инцидентности, степени вершины. Способы задания графов.
14. Понятия подграфа, остовного и порожденного подграфов
15. Пути и циклы. Связность, компоненты, шарниры, перешейки, блоки
16. Расстояния и метрические характеристики: диаметр и радиус графа
17. Изоморфизм графов. Инварианты. Автоморфизмы. Помеченные и непомеченные графы. Число помеченных графов

### **5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

1. Какое отношение называется функциональным? Дайте определения инъекции, сюръекции и биекции. Приведите примеры.
2. Сформулируйте комбинаторные правила равенства, суммы и произведения. Дайте определение перестановки из  $n$  различных элементов. Приведите формулу для числа перестановок из  $n$  элементов.
3. Дайте определение размещения из  $n$  элементов по  $k$ . Приведите формулу для числа размещений из  $n$  по  $k$ . Дайте определение сочетания из  $n$  элементов по  $k$ . Приведите формулу для числа сочетаний из  $n$  по  $k$ .
4. Воспроизведите формулу бинома Ньютона. Что такое биномиальные коэффициенты? Перечислите свойства биномиальных коэффициентов.
5. Что такое треугольник Паскаля? Что и каким образом он позволяет вычислять?

6. Чему равно число упорядоченных разбиений множества из  $n$  элементов на  $k$  частей, среди которых могут быть пустые части? Приведите формулу.
7. Приведите формулу для числа упорядоченных разбиений множества из  $n$  элементов на  $k$  частей с заданными мощностями  $n_i, i = 1, \dots, k$ .
8. Сформулируйте полиномиальную теорему.
9. Дайте определение сочетания с повторениями. Чему равно число сочетаний с повторениями из  $n$  по  $k$ ?
10. Приведите формулу включений-исключений для двух и трех множеств.
11. Какой общий вид имеет линейное рекуррентное уравнение порядка  $k$  с постоянными коэффициентами?
12. Продемонстрируйте метод решения линейного рекуррентного уравнения второго порядка.
13. Деревья, их число. Центр дерева. Код Прюфера.
14. Двудольные графы. Теорема Кёнига.
16. Планарные графы. Формула Эйлера. Критерии планарности
17. Эйлеровы циклы и пути. Алгоритм построения эйлеровых циклов
18. Пространство циклов графа. Квазициклы. Фундаментальные циклы. Цикломатическое число. Построение базы циклов

#### **Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

#### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Алексеев Владимир Евгеньевич. Дискретная математика : учебное пособие / В. Е. Алексеев ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2017. - 139 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=823847&idb=0>.
2. Алексеев Владимир Евгеньевич. Сборник задач по дискретной математике : задачник для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010300 "Фундам. информатика и

информ. технологии", 010400 "Приклад. математика и информатика" / ННГУ. - Н. Новгород : [б. и.], 2012 (Тип. ННГУ). - 80 с. - 26.00., 50 экз.

Дополнительная литература:

1. Яблонский Сергей Всеволодович. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". - Изд. 5-е, стер. - М. : Высшая школа, 2008. - 384 с. : ил. - ISBN 978-5-06-005943-4 : 574.00., 2 экз.
2. Гаврилов Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. - 3-е изд., перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 416 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 978-5-9221-0477-7., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=665717&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=1683>

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.03 - Механика и математическое моделирование.

Автор(ы): Захарова Дарья Владимировна.

Заведующий кафедрой: Золотых Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.