

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Современные методы математической физики

Уровень высшего образования

Магистратура

Направление подготовки / специальность

01.04.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование физико-механических процессов

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.05 Современные методы математической физики относится к обязательной части образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-2: Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1: Знает современные математические методы решения прикладных задач ОПК-2.2: Умеет совершенствовать математические методы решения прикладных задач ОПК-2.3: Имеет навыки создания новых математических методов решения прикладных задач	ОПК-2.1: Знать современные математические методы решения прикладных задач ОПК-2.2: Уметь совершенствовать математические методы решения прикладных задач ОПК-2.3: Владеть опытом создания новых математических моделей, опытом исследования корректности этих моделей	Задачи	Экзамен: Контрольные вопросы Задания

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	6
Часов по учебному плану	216
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	32
- КСР	2
самостоятельная работа	114
Промежуточная аттестация	36

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Всего	
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы			
Ф	Ф	Ф	Ф	Ф		
1. Уравнения математической физики	8	2	2	4	4	
2. Пробные и обобщённые функции	12	2	2	4	8	
3. Дифференцирование обобщённых функций	12	2	2	4	8	
4. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций	12	2	2	4	8	
5. Обобщённые функции медленного роста	12	2	2	4	8	
6. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста	12	2	2	4	8	
7. Обобщённые решения линейных дифференциальных уравнений	12	2	2	4	8	
8. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений (L2-теория)	12	2	2	4	8	
9. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида	12	2	2	4	8	
10. Задачи на собственные значения и собственные функции для основных краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида	12	2	2	4	8	
11. Гладкость обобщённых решений	12	2	2	4	8	
12. Классические решения уравнений Лапласа и Пуассона	12	2	2	4	8	
13. Обобщённые решения смешанных задач для волнового уравнения	16	4	4	8	8	
14. Обобщённые решения смешанных задач для параболических уравнений.	12	2	2	4	8	
15. Смешанные задачи для системы уравнений Максвелла.	10	2	2	4	6	
Аттестация	36					
КСР	2			2		
Итого	216	32	32	66	114	

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Уравнения математической физики. Уравнение колебаний, уравнения диффузии и теп-лопроводности (стационарные и нестационарные). Системы уравнений Максвелла в различных приближениях (электростатика, магнитостатика, квазистационарные элек-трические и магнитные приближения, полная нестационарная система).
2. Пробные и обобщённые функции. Полнота пространства обобщённых функций. Регу-лярные и сингулярные обобщённые функции. Линейная замена в обобщённых функци-ях.

3. Дифференцирование обобщённых функций. Свойства обобщённых производных. Пер-вообразная обобщённой функции.
4. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций. Свойства прямого произведения. Свойства свёртки. Регуляризация обобщённых функций.
5. Обобщённые функции медленного роста. Обобщённые функции с точечными носителями.
6. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста. Свойства преобразования Фурье.
7. Обобщённые решения линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения. Фундаментальные решения оператора теплопроводности, волнового оператора, оператора Лапласа, Гельмгольца. Фундаментальное решение оператора переноса.
8. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений (L_2 -теория). Теорема существования решения произвольного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Корректные задачи.
9. Обобщённые решения краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Предварительные сведения из теории гильбертовых пространств. Пространства Соболева. Теорема о полноте пространств Соболева. Следы функций. Обобщённые формулировки основных краевых задач и вариационные принципы.
10. Задачи на собственные значения и собственные функции для основных краевых задач для эллиптических уравнений дивергентного вида. Свойства разрешающего оператора вспомогательной задачи (ограниченность, самосопряжённость, вполне непрерывность). Применение теоремы Гильберта-Шмидта к задачам на собственные значения и собственные функции.
11. Гладкость обобщённых решений. Классические решения.
12. Классические решения уравнений Лапласа и Пуассона. Гармонические функции.
13. Обобщённые решения смешанных задач для волнового уравнения. Обобщённая формулировка смешанных задач для гиперболических уравнений. Теоремы о существовании и единственности обобщённого решения смешанных задач.
14. Обобщённые решения смешанных задач для параболических уравнений. Обобщённые формулировки задач и теоремы о существовании и единственности решения. Метод Галёркина.
15. Смешанные задачи для системы уравнений Максвелла. Формулировка основных задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и для системы уравнений Максвелла в квазистационарных и стационарных приближениях. Пространства вектор-функций. Энергетические неравенства и теоремы о существовании и единственности решений основных краевых задач для системы уравнений Максвелла в стационарном приближении.
16. Краевые и смешанные задачи для стационарной и нестационарной задачи Стокса. Теоремы существования и единственности обобщённого решения. Метод Галёркина.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности.

Виды самостоятельной работы

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы:

работа над основной и дополнительной литературой;

повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
выполнение домашних практических заданий (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

Задания для самостоятельной работы

1. Уравнения механики сплошных сред (уравнения газо- гидродинамики и задача Стокса, уравнения теории упругости).
2. Линейная замена в обобщённых функциях.
3. Дифференцирование обобщённых функций. Первообразная обобщённой функции.
4. Регуляризация обобщённых функций.
5. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций медленного роста.
6. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста.
7. Задача Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.
8. Элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений (L2-теория). Теорема существования решения произвольного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Корректные задачи.
9. Теоремы о существовании и единственности решений основных краевых задач. Свойства разрешающих операторов.
10. Свойства разрешающего оператора вспомогательной задачи. Гладкость обобщённых собственных функций.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Доказать неравенство Фридрикса для случая.
2. Вычислить производные порядка 1,2 функции.
3. Установить, что смешанная обобщённая производная не зависит от порядка дифференцирования.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих

Оценка	Критерии оценивания
	вопросах преподавателя

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Лебеговы пространства L_p и их свойства.
2. Пространства Соболева W_p .
3. Полнота пространства W_2 .

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок

Оценка	Критерии оценивания
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Задания) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Пусть в области Ω рассматривается задача

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q(\bar{x})u = f(\bar{x}), u(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in \partial\Omega,$$

где $p \in C^1(\bar{\Omega})$, $p(\bar{x}) \geq p_0 > 0$, $\bar{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $q \in C(\bar{\Omega})$, $f \in L_2(\Omega)$.

Сформулировать обобщённую постановку задачи и соответствующую вариационную задачу.

2. Доказать, $y = \operatorname{sgn} x \notin H^1(-1,1)$.

3. Показать, что в пространствах $H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega)$ и

$H(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K_0(\operatorname{div}; \Omega)$ можно ввести скалярное произведение формулой

$$(\bar{u}, \bar{v})_0 = (\operatorname{rot} \bar{u}, \operatorname{rot} \bar{v})_{2, \Omega}$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задания)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок

Оценка	Критерии оценивания
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Мизохата Сигэру. Теория уравнений с частными производными / пер. с яп. Ю. В. Егорова ; под ред. О. А. Олейник. - М. : Мир, 1977. - 504 с. - 2.30., 3 экз.
2. Калинин А. В. Введение в современные методы математической физики : учебное пособие / Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2014. - 120 с. - Рекомендовано учёным советом механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся в академической магистратуре по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Физика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729777&idb=0>.
3. Жидков А. А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. А., Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 82 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730395&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Дерендяев Николай Васильевич. Проекционный метод Фурье : учебно-методическое пособие / Н. В. Дерендяев, А. В. Калинин ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 75 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851280&idb=0>.
2. Михлин Соломон Григорьевич. Линейные уравнения в частных производных : учеб. пособие для мех.-мат. и физ. специальностей вузов. - М. : Высшая школа, 1977. - 431 с. - (Физико-математическая библиотека инженера). - 0.99., 32 экз.
3. Ладыженская Ольга Александровна. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - 2-е изд., перераб. - М. : Наука, 1973. - 576 с. - На корешке загл.: Уравнения эллиптического типа. - 2.50., 2 экз.
4. Михайлов Валентин Петрович. Дифференциальные уравнения в частных производных : [учеб. пособие для мех.-мат. и физ. специальностей вузов]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1983. -

424 с. - 1.20., 4 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966 (djvu) .
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
2. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
3. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.04.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.