

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

Рабочая программа дисциплины

**Численные методы решения
задач оптимизации**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

магистратура

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

010401 Математика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части.

Б1.О.16 Численные методы решения задач оптимизации

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1.: Знает основные принципы управления командой проекта.	Знать различные приемы и способы организации командной работы по созданию программных комплексов, реализующих численные методы оптимизации функций многих переменных	собеседование
	УК-3.2.: Умеет вырабатывать командную стратегию при выполнении ИТ проекта.	Уметь вырабатывать командную стратегию для создания программных комплексов, реализующих численные методы оптимизации функций многих переменных	лабораторные работы
	УК-3.3.: Владеет методами мотивации команды на достижение поставленной цели.	Владеть навыками руководства командной работой по созданию программных комплексов, реализующих численные методы оптимизации функций многих переменных	лабораторные работы
ОПК-1 Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1.: Знает основы фундаментальных дисциплин в области математических и (или) естественных наук	Знать основы математической теории оптимизации, включая необходимые и достаточные условия оптимальности функций многих переменных и численные алгоритмы оптимизации таких функций	собеседование
	ОПК-1.2.: Умеет выбирать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Уметь правильно выбирать наиболее подходящий и эффективный алгоритм численной оптимизации для решения конкретной задачи, давать теоретическое обоснование сделанного выбора, а также использовать соответствующий алгоритм оптимизации для решения конкретных задач	типовые задачи
	ОПК-1.3.: Владеет навыками применения фундаментальных знаний в профессиональной деятельности	Владеть навыками разработки программ для численной оптимизации функций многих переменных и формализации конкретных прикладных задач	лабораторные работы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
контактная работа:	33
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Седьмой семестр						
Тема 1 Постановки прикладных задач и их формализация	9		3		3	6
Тема 2 Классификация численных методов оптимизации	7		1		1	6
Тема 3 Основы выпуклого анализа	9		3		3	6
Тема 4 Общая задача минимизации	8		2		2	6
Тема 5 Задание целевой функции как подпрограммы в системе MATLAB и особенности ее вызова для случаев, когда требуется или не требуется градиент, гессиан. Построение линий уровня и сеточного графика функции двух перемен-	7		1		1	6

ных в системе MATLAB						
Тема 6 Метод наискорейшего спуска. Овражный эффект. Визуализация работы метода в системе MATLAB	9		3		3	6
Тема 7 Метод тяжелого шарика. Методы сопряженных направлений и сопряженных градиентов для квадратичных функций и в общем случае. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса	9		3		3	6
Тема 8 Методы Ньютона и Ньютона-Рафсона	8		2		2	6
Тема 9 Квазиньютоновские методы: DFP, Бройдена, BFS, BFGS	9		3		3	6
Тема 10 Методы доверительной области	9		3		3	6
Тема 11 Методы прямого поиска (симплексный метод Нелдера-Мида и метод конфигураций Хука-Дживса)	8		3		3	5
Тема 12 Методы решения нелинейной задачи наименьших квадратов (методы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта)	7		2		2	5
Тема 13 Простейшие методы условной оптимизации (метод проекции градиента, метод условного градиента, метод квадратичного штрафа)	8		3		3	5
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация - зачет						
Итого	108		32		33	75

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, монографиям и учебным пособиям, указанным в списке литературы, решении практических задач, самостоятельном выполнении при контроле со стороны преподавателя заданий по лабораторным работам, подготовке к семинарам, ответах на вопросы самоконтроля.

Контроль самостоятельной работы – домашние задания, отчеты о выполнении лабораторных работ.

В частности, важной составляющей изучения дисциплины является самостоятельная работа обучающихся при подготовке к лабораторным работам по дисциплине с целью их наиболее эффективного проведения. При этой подготовке обучающиеся дополнительно самостоятельно изучают те разделы теоретического материала, которые являются базовыми при проведении очередной лабораторной работы. Это дополнительное самостоятельное изучение, прежде всего, основано на углубленном самостоятельном изучении соответствующих разделов книг, учебно-методических пособий приведенных в списках основной и дополнительной литературы. Кроме того, при указанном дополнительном самостоятельном изучении можно использовать и доступные ресурсы сети Интернет, так как они являются одним из альтернативных источников быстрого поиска требуемой информации. Их использование возможно для получения основных и дополнительных сведений по изучаемым материалам. Одними из возможных ресурсов для этой цели являются те, которые указаны в списке программного обеспечения и Интернет-ресурсов, см. ниже.

Темы лабораторных работ:

1. Построение сеточного графика и линий уровня функции двух переменных.
2. Метод наискорейшего спуска.
3. Метод Ньютона-Рафсона.
4. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.
5. Методы DFP и BFGS.
6. Простейший метод доверительной области.
7. Метод Нелдера-Мида.
8. Метод конфигураций Хука-Дживса.
9. Метод Гаусса-Ньютона.

Примечание. Каждый студент получает индивидуальные задания по каждой из приведенных выше тем, самостоятельно пишет программу, реализующую соответствующий метод в системе MATLAB, и минимизирует с его помощью конкретную функцию из индивидуального задания, после чего пишет письменный отчет и защищает его на семинарском занятии.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				

компетенций)							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.				Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.		
	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень

		хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не за- чтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача безусловной конечномерной минимизации.	УК-3
2. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача условной конечномерной минимизации.	УК-3
3. Привести классификацию численных методов оптимизации.	УК-3
4. Описать синтаксис основных команд системы MATLAB, используемых для построения линий уровня и сеточного графика функции двух переменных.	УК-3
5. Описать технологию визуализации работы численных методов безусловной двумерной оптимизации в системе MATLAB.	УК-3
6. Описать технологию визуализации допустимого множества задачи условной двумерной оптимизации в системе MATLAB.	УК-3
7. Понятие выпуклого множества. Свойства выпуклых множеств.	ОПК-1
8. Понятие проекции точки на множество. Критерий проекции на выпуклое множество.	ОПК-1
9. Понятие выпуклой функции. Свойства выпуклых функций.	ОПК-1
10. Критерий выпуклости в классе дифференцируемых функций.	ОПК-1
11. Понятие положительной и неотрицательной определенности матрицы. Критерий Сильвестра.	ОПК-1
12. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций.	ОПК-1
13. Точки минимума выпуклых функций и их свойства.	ОПК-1
14. Критерий оптимальности в классе выпуклых дифференцируемых функций.	ОПК-1

15. Понятие возможного направления. Понятие направления спуска. Необходимое условие оптимальности общего вида в общей задаче минимизации.	ОПК-1
16. Необходимое и достаточное условия направления спуска.	ОПК-1
17. Необходимое условие оптимальности первого порядка в общей задаче минимизации.	ОПК-1
18. Градиентные методы (в частности, простейший с фиксированным шагом, и метод наискорейшего спуска). Овражный эффект (объяснение с помощью геометрической иллюстрации).	ОПК-1
19. Три теоремы о сходимости градиентных методов (одна – с доп-вом).	ОПК-1
20. Минимизация квадратичных функций: методы сопряженных направлений (с выводом итерационной формулы на основе леммы о линейной независимости сопряженных направлений).	ОПК-1
21. Минимизация квадратичных функций: метод сопряженных градиентов как метод сопряженных направлений.	ОПК-1
22. Метод сопряженных градиентов для случая неквадратичной функции (методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса).	ОПК-1
23. Метод тяжелого шарика.	ОПК-1
24. Методы Ньютона (идея метода; алгоритм; теорема о сходимости; достоинства и недостатки) и Ньютона-Рафсона.	ОПК-1
25. Понятие о квазиньютоновских методах.	ОПК-1
26. Метод проекции градиента.	ОПК-1
27. Метод условного градиента.	ОПК-1
28. Метод квадратичного штрафа.	ОПК-1

5.2.2. Типовые задания для оценки сформированности компетенции

Вариант 1

1. Необходимое и достаточное условия направления спуска.
2. Существует ли точка глобального минимума в задаче оптимизации: $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$, $x^2 + y^2 \leq 4$? Почему?
3. Проверить на выпуклость множество $X = \Gamma_{c, \alpha}$.

5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

Задача 1. Проверить на выпуклость функцию $f(x) = (x_1)^2 - x_1 x_2 + (x_2)^2$ на множестве $X = R^2$.

Задача 2. Найти итерационную последовательность метода наискорейшего спуска в задаче $\frac{1}{2}(2(x^1)^2 + (x^2)^2) \rightarrow \min$, $x \in R^2$, взяв начальную точку $x_0 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

Задача 3. Решить задачу $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$ методом Ньютона, начав с точки (1,1).

Задача 4. Для задачи $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min$, $(x^1)^2 + x^2 \leq 1$, $x^2 \geq 0$, построить допустимое множество и линии уровня целевой функции; указать точку глобального минимума (если она существует). Выполняются ли какие-то достаточные условия существования глобального минимума в этой задаче?

Задача 5. Решить задачу безусловной минимизации: $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Доказать, что решением задачи $\varphi(x) = (c, x) \rightarrow \min$, $x \in X = \{x \in R^n : |x - z| \leq r\}$, $c \neq 0$, является $\bar{x} = z - \frac{c}{|c|} r$. В каком из методов условной оптимизации приходится решать подобного сорта задачи?

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988 (215).

б) дополнительная литература:

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986 (4).
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983 (14).

в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре математической физики и оптимального управления для выдачи студентам

1. Сумин В.И. Классические разделы теории конечномерных экстремальных задач. Часть 1. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Методическая разработка. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2001 (142).
2. Сумин В.И. Элементарный выпуклый анализ. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (170).
3. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).
4. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
5. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
6. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н. Новгород: ННГУ, 2010 (70).

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 486.12.06
2. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 486.12.06
3. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 1174.16.06
4. <http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 1173.16.06
5. <http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

MATLAB

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Компьютерный класс, оснащенный персональными компьютерами с установленной на них системой MATLAB, а также оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. А.В.Чернов

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой М.В. Иванченко

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.