

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Вероятностные модели в естествознании

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность образовательной программы
Системное программирование

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.07.02 Вероятностные модели в естествознании относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-3: Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники	<p>ПК-3.1: Знает методы анализа и исследования математических моделей в области фундаментальной информатики и информационных технологий</p> <p>ПК-3.2: Умеет определять ключевые свойства и ограничения системы</p>	<p>ПК-3.1: Знать основные понятия теории конечных цепей Маркова и строить математические модели на их основе. Знать основные понятия математической статистики в области цепей Маркова</p> <p>ПК-3.2: Уметь проводить исследование конечной цепи Маркова с доходами. Уметь решать задачу выбора оптимального управления для максимизации предельного одношагового дохода Уметь формулировать и проверять типовые статистические гипотезы о конечных цепях Маркова</p>	Задачи	Зачёт: Контрольные вопросы

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	3
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	24

- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	0
- КСР	1
самостоятельная работа	83
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
Ф	Ф	Ф	Ф	Ф	
Тема 1. Марковские случайные процессы с дискретным временем и конечным числом состояний	26	6	0	6	20
Тема 2. Марковские процессы с доходами	24	4	0	4	20
Тема 3. Рекуррентный и итерационный методы для изучения процессов последовательных решений	26	6	0	6	20
Тема 4. Статистика цепей Маркова	31	8	0	8	23
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	108	24	0	25	83

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Марковские случайные процессы с дискретным временем и конечным числом состояний
 Марковская цепь как вероятностная модель реальных процессов и явлений. Матрица вероятностей перехода за один шаг, уравнения Чапмена-Колмогорова в скалярной и матричной форме, рекуррентное соотношение для вероятностей состояний системы в скалярной и векторно-матричной форме. Граф переходов цепи Маркова. Классификация состояний по арифметическим и предельным свойствам (существенные, несущественные состояния, периодичность, возвратность и невозвратность). Стационарное и эргодическое распределения. Метод z-преобразования для вычисления матрицы переходных вероятностей.

Тема 2. Марковские процессы с доходами

Рекуррентное соотношение для доходов. Дисконтированный доход. Средний доход за шаг. Анализ марковских процессов с доходами с помощью z-преобразования. Поведение полного ожидаемого дохода в случае длительного функционирования системы. Предельный одношаговый ожидаемый доход. Связь со стационарными вероятностями.

Тема 3. Рекуррентный и итерационный методы для изучения процессов последовательных решений

Понятие об управляемом марковском процессе. Политика управления. Марковская политика, стационарная политика. Этапы рекуррентного метода и его применение на примерах. Задача динамического программирования для конечного промежутка времени. Итерационный метод улучшения политики управления (алгоритм Ховарда) для марковских процессов с одним эргодическим классом, доказательство его эффективности. Методы повышения вычислительной эффективности (алгоритм Д. Дж. Уайта)

Тема 4. Статистика цепей Маркова.

Функция правдоподобия. Оценка переходных вероятностей. Оценка параметров распределения цепи Маркова. Критерий согласия хи-квадрат. Формула Уиттла. Элементы теории скрытых марковских моделей

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Самостоятельная работа студентов включает в себя самостоятельное изучение некоторых разделов курса "Вероятностные модели в естествознании", выполнение домашних работ. Для выполнения самостоятельной работы студенту предлагается использовать конспекты лекций и литературу, предложенную в п. 7 данного документа.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-3:

Задача 1.

Для матрицы переходных вероятностей цепи Маркова

0.4 0.6 0 0
0.1 0.9 0 0
0 0.5 0 0.5
0 0 0.8 0.2

проведите классификацию состояний.

Задача 2.

Цепь Маркова с двумя состояниями наблюдалась на протяжении 100 шагов. Матрица частот переходов имеет следующий вид:

34 21

29 11

Найдите оценки переходных вероятностей, используя полное правдоподобие и предполагая, что начальное распределение совпадает с эргодическим.

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
не зачтено	Отсутствие минимальных умений. При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном

			все задания, но не в полном объеме	Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	в полном объеме, но некоторые с недочетами	и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-3

1. Сформулируйте определение марковского случайного процесса с дискретным временем и конечным числом состояний. Запишите уравнения Чапмена-Колмогорова.

2. Сформулируйте определение сообщающихся состояний, существенных состояний, периода состояния
3. Сформулируйте определение возвратного и невозвратного состояния, положительно возвратного и нулевого возвратного состояния.
3. Дать определение z -преобразования и привести три примера для разного типа последовательностей.
4. Дайте определение цепи Маркова с доходами. Приведите рекуррентные формулы для ожидаемых доходов за конечное число ходов.
5. Указать особенности z -преобразования для марковских цепей, имеющих невозвратные и периодические состояния.
6. Сформулируйте определение эргодической цепи Маркова. Сформулируйте достаточное условие эргодичности конечной цепи Маркова. Связь со стационарным распределением.
8. Описать метод анализа марковских процессов с доходами с помощью z -преобразования.
9. Указать особенности поведения полного ожидаемого дохода в случае длительного функционирования системы (асимптотический одношаговый доход).
10. Сформулируйте определение управляемой цепи Маркова, марковской политики и стационарной политики.
11. Описать суть итерационного метода для марковских процессов с одним эргодическим классом и привести пример его применения.
12. Полная и приведенная функции правдоподобия для цепи Маркова. Оценка переходных вероятностей по приведенной функции правдоподобия.
13. Полная и приведенная функции правдоподобия для цепи Маркова. Оценка переходных вероятностей по полной функции правдоподобия для цепи с двумя состояниями и положительной матрицей частот переходов.
14. Критерий хи-квадрат для проверки гипотезы о независимости состояний против альтернативы марковской зависимости.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Продемонстрированы основные знания. Ответы даны с негрубыми ошибками. Даны ответы на все заданные вопросы.
не зачтено	Низкий уровень или отсутствие базовых знаний. Отсутствуют ответы на все большую часть вопросов. Ответы на некоторые вопросы содержат грубые ошибки.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Федоткин Михаил Андреевич. Модели в теории вероятностей : учебник. - М. : Физматлит : ННГУ, 2012. - 608 с. - (Библиотека Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского). - ISBN 978-5-9221-1384-7 : 600.00., 200 экз.
2. Кельберт М. Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения: в 2 ч. Часть I / Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. - Москва : МЦНМО, 2021. - 396 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-3606-2., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828735&idb=0>.
3. Кельберт М. Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения: в 2 ч. Часть II / Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. - Москва : МЦНМО, 2021. - 320 с. - Книга из коллекции МЦНМО - Математика. - ISBN 978-5-4439-3607-9., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=828736&idb=0>.

Дополнительная литература:

1. Ширяев Альберт Николаевич. Вероятность : учеб. пособие для студентов ун-тов по специальности "Математика". - М. : Наука, 1980. - 575 с. : ил. - 1.50., 25 экз.
2. Соколов Г. А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике / Соколов Г. А., Чистякова Н. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 248 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 5-9221-0624-4., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=695920&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Лобачевского
<http://www.unn.ru/books/resources.html>
2. Общероссийский математический интернет-портал <http://mathnet.ru>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 02.03.02 - Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Автор(ы): Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № протокол №6.