

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Уравнения в частных производных

---

Уровень высшего образования

Специалитет

---

Направление подготовки / специальность

01.05.01 - Фундаментальные математика и механика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.16 Уравнения в частных производных относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ОПК-1: Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук ОПК-1.2: Умеет формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук ОПК-1.3: Имеет практический опыт постановки и решения актуальных задач математики и механики	ОПК-1.1: Знает классификацию уравнений математической физики, основные задачи для уравнений математической физики, общие схемы основных методов математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач  ОПК-1.2: Умеет формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук  ОПК-1.3: Имеет навыки математически корректной постановки задач математической физики, исследования корректности постановки задач, применения методов математической физики при решении различных задач	Практическое задание	Зачёт: Контрольная работа  Экзамен: Контрольные вопросы
ОПК-2: Способен создавать, анализировать и реализовывать	ОПК-2.1: Знает основные положения, терминологию и методологию в области	ОПК-2.1: Знает классификацию уравнений математической	Практическая задача	Зачёт: Контрольная работа

новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	математического и алгоритмического моделирования ОПК-2.2: Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук ОПК-2.3: Имеет практический опыт разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности	физики, основные задачи для уравнений математической физики, общие схемы основных методов математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач  ОПК-2.2: Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук  ОПК-2.3: Имеет навыки математически корректной постановки задач математической физики, исследования корректности постановки задач, применения методов математической физики при решении различных задач		Экзамен: Контрольные вопросы
---	---	---	--	---------------------------------

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>7</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>252</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>64</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>64</b>
- КСР	<b>3</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>85</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b>
	<b>Экзамен, Зачёт</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабора- торные работы), часы	Всего	
	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0
1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными	1	1		1	
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка	12	4	4	8	4
3. Вывод основных уравнений математической физики	9	3	2	5	4
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера	16	4	6	10	6
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа	16	4	6	10	6
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны.	10	4	2	6	4
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности	14	4	4	8	6
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны	14	4	4	8	6
9. Задача Штурма–Лиувилля	15	4	4	8	7
10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах	18	4	6	10	8
11. Специальные функции математической физики	14	4	4	8	6
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула Пуассона	20	6	6	12	8
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина	22	6	8	14	8
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций	14	6	2	8	6
15. Элементы теории потенциала	18	6	6	12	6
Аттестация	36				
КСР	3			3	
Итого	252	64	64	131	85

### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка
3. Вывод основных уравнений математической физики
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны.
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны
9. Задача Штурма–Лиувилля

10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах
11. Специальные функции математической физики
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула Пуассона
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций
15. Элементы теории потенциала

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы:

- работа над основной и дополнительной литературой;
- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение домашних практических заданий (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение контрольных работ (1 раз в семестр),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен, зачет).

Самостоятельная работа студентов обеспечивается доступными учебной и научной литературой, интернет-ресурсами, которые содержат теоретический материал с иллюстрирующими примерами и упражнения для самостоятельного выполнения, достаточные для подготовки к зачету и экзамену и освоения дисциплины в целом.

#### 5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Практическое задание) для оценки сформированности компетенции ОПК-1:

Найти наибольшую область, в которой задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

$$\begin{cases} x^2 U_{xx} - y^2 U_{yy} - 2x U_x = 0 \\ U|_{y=1} = x, -2 < x < 1, U_y|_{y=1} = x, -2 < x < 1. \end{cases}$$

### Критерии оценивания (оценочное средство - Практическое задание)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Практическая задача) для оценки сформированности компетенции ОПК-2:

1. Полуограниченной струне с жестко закрепленным концом  $x = 0$  сообщена начальная скорость равная  $v_0$  на отрезке  $[c, 2c]$  и нулю вне этого отрезка. Построить профиль струны в момент времени  $t_0 = \frac{c}{a}$ . Расписать формулы, описывающие профиль струны в момент времени  $t_0 = \frac{5c}{3}$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Практическая задача)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Ответ полный и правильный на основании изученной теории; теоретический материал и решение поставленных задач изложены в необходимой логической последовательности, грамотный научный язык; ответ самостоятельный. Могут быть допущены две-три несущественные ошибки, исправленные по требованию преподавателя.
не зачтено	Ответ обнаруживает непонимание студентом основного содержания учебного материала или допущены существенные ошибки, которые не могут быть исправлены при наводящих вопросах преподавателя.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

#### Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				

ения компет							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».

	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-1

1. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ( $x=0$ ) свободен, а другой ( $x=l$ ) закреплен жестко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$U|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad U_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}$$

2. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на конце  $x=0$  и подверженной на конце  $x=l$  действию силы  $A \sin \omega t$ . Начальные условия нулевые. Найти решение при всех  $0 < t < 3l/2a$

#### 5.3.2 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. К струне, один конец которой ( $x=0$ ) свободен, а другой ( $x=l$ ) закреплен жестко, с момента времени  $t=0$  приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью  $f(x,t)=A \sin \omega t$ . Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.
2. Найти стационарную температуру в круглом цилиндре с радиусом основания  $r_0$  и высотой  $h$ , если температуры нижнего и верхнего оснований равны соответственно  $T_0$  и  $T_0(1 - \frac{r}{r_0})$ , а боковая поверхность цилиндра теплоизолирована.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
не зачтено	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.

#### 5.3.3 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-1



1. Задача Коши для уравнений свободных колебаний струны. Формула Даламбера для решения задачи Коши
2. Получить функцию Грина для шара

#### 5.3.4 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ОПК-2

1. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных
2. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки
отлично	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
очень хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок
хорошо	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок
удовлетворительно	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок
неудовлетворительно	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки
плохо	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа

#### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Тихонов Андрей Николаевич. Уравнения математической физики : [учеб. пособие для ун-тов]. - 4-е изд., испр. - М. : Наука, 1972. - 735 с. : с черт. - 1.58., 6 экз.
2. Смирнов Модест Михайлович. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка : [учеб. пособие для мех.-мат. и физ.-мат. фак. ун-тов]. - Минск : Наука, 1964. - 206 с. : с черт. - 0.37., 11 экз.
3. Сборник задач по уравнениям математической физики : учеб. пособие для физ.-мат. и инженер.-физ. специальностей вузов / под ред. В. С. Владимирова. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М. : Наука, 1982. - 256 с. : граф. - 0.85., 77 экз.
4. Калинин А. В. Введение в современные методы математической физики : учебное пособие / Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2014. - 120 с. -

Рекомендовано учёным советом механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся в академической магистратуре по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование». - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Физика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=729777&idb=0>.

5. Жидков А. А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными : электронное учебно-методическое пособие / Жидков А. А., Калинин А. В., Тюхтина А. А. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. - 82 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ННГУ им. Н. И. Лобачевского - Математика., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=730395&idb=0>.

#### Дополнительная литература:

1. Арсенин Василий Яковлевич. Методы математической физики и специальные функции : [учеб. пособие для втузов]. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1984. - 383 с. : граф. - 1.10., 37 экз.
2. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике / Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. - 4-е, изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 688 с. - Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов университетов. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 5-9221-0311-3., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=700803&idb=0>.
3. Дерендяев Николай Васильевич. Проекционный метод Фурье : учебно-методическое пособие / Н. В. Дерендяев, А. В. Калинин ; ННГУ им. Н. И. Лобачевского. - Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 75 с. - Текст : электронный., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=851280&idb=0>.

#### Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)
3. Библиотека Лань (<https://e.lanbook.com/>).

Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.–252с. [https://e.lanbook.com/book/70703?category\\_pk=917#authors](https://e.lanbook.com/book/70703?category_pk=917#authors)

#### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.05.01 - Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы): Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Калинин Алексей Вячеславович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.