

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
(протокол от 14.12.2021 г. №4)

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.01 Математика

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Форма обучения
Очная

Нижегород

2022 год

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части.

Обязателен для освоения в 3, 4 семестрах, второго года обучения. Индекс дисциплины — **Б1.О.12.**

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.0.12, «Дифференциальные уравнения», относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1	<u>Знать</u> формулировки основных теорем теории ДУ, классификацию основных типов ДУ, интегрируемых в квадратурах и методов решений.	Собеседование
	УК-1.3	<u>Уметь</u> решать основные типы ДУ первого порядка и высших порядков, различать линейные и нелинейные ДУ и системы, уметь проводить линеаризацию уравнений в окрестности заданного решения, создавать математическую модель физической задачи. <u>Владеть</u> процедурой постановки численных исследований, проверки их достоверности и сравнения с получаемой информацией.	Задача
ОПК-1 Способен	ОПК-1.1. Знает основные положения и концепции в	<u>Знать</u> основные определения и теоремы курса дифференциальных уравнений.	Собеседование

применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	области математических и естественных наук, основную терминологию.		
	ОПК-1.3. Имеет практический опыт работы с решением стандартных математических задач..	Уметь применять полученные знания для исследования дифференциальных уравнений и их систем Владеть навыками и методами исследования решений дифференциальных уравнений и их систем.	Задача

3. Структура и содержание дисциплины «Дифференциальные уравнения»

3.1 Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	9 ЗЕТ
Часов по учебному плану	324
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	64
- занятия лекционного типа	64
- занятия семинарского типа	0
- занятия лабораторного типа	4
- текущий контроль (КСР)	
самостоятельная работа	192
Промежуточная аттестация	экзамен

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Понятие дифференциального уравнения. Геометрическая интерпретация: расширенное фазовое пространство, поле направлений, интегральные кривые, изоклины. Элементарные	39	6	6		12	27

методы интегрирования.						
2. Смысл и формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем и уравнений произвольного порядка. Примеры нарушения единственности. Динамические системы на прямой.	25	4	4		8	17
3. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной: элементы теории и методы интегрирования.	33	6	6		12	21
4. Общая теория линейных дифференциальных уравнений. Формула Лиувилля – Остроградского. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных для неоднородного уравнения.	37	8	8		16	21
5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Уравнения с правой частью в виде квазиполинома. Уравнения Эйлера.	44	8	8		16	28
Текущий контроль (КСР)	2		2			
Промежуточная аттестация	экзамен					
6. Краевые задачи для линейных ДУ второго порядка, теорема об альтернативе. Функция Грина краевой задачи, решение неоднородной краевой задачи с помощью функции Грина.	17	2	2		4	13
7. Общая теория систем линейных дифференциальных уравнений ДУ 1-го порядка. Формула Лиувилля – Остроградского. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных для неоднородной системы. Фундаментальные матрицы и их вид.	19	4	4		6	13
8. Системы линейных ДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера, характеристическое уравнение. Нахождение фундаментальной системы решений. Неоднородные системы с неоднород. в виде векторного квазиполинома	31	10	10		12	19
9. Доказательство теоремы существования и единственности, различные варианты теоремы, продолжение решений, непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров.	17	2	2		4	13
10. Дифференцируемость решения по параметру и начальным значениям. Уравнения в вариациях.	11	2	2		4	7
11. Понятия теории динамических систем, траектории, классификация. Фазовая плоскость. Топология фазовых кривых. Классификация линейных особых точек на плоскости. Замкнутые кривые: отображение Пуанкаре, устойчивость предельного цикла	17	6	6		8	9
12. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Критерий устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами. Критерий Рауса-Гурвица. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Теорема Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости нелинейных системы.	11	2	2		4	7

13. Первые интегралы автономной системы. Существование полной системы первых интегралов.	10	2	2		3	7
14. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.	9	2	2		3	6
Текущий контроль (КСР)	2		2			
Промежуточная аттестация	экзамен					
Итого	324	64	68			192

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен).

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся контрольные работы. Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных	При решении стандартных	Продемонстрированы	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все

	х умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопрос

Код формируемой компетенции

1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения, порядок д.у. Решение дифференциального уравнения. Уравнение, разрешенное относительно старшей производной. Примеры дифференциальных уравнений. Геометрический смысл дифференциального уравнения и его решений, изоклины. УК-1
2. Задача Коши для ОДУ первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решений. УК-1
3. Интегрирование дифф. уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения. ОПК-1
4. Интегрирование дифф. уравнений первого порядка: линейные дифф. Уравнения, уравнения Бернулли, случаи интегрируемости уравнения Риккати. ОПК-1
5. Уравнение $x' = f(x)$ и одномерная теория динамических систем. ОПК-1
6. Интегрирование д. у. первого порядка: симметричная форма д.у. первого порядка, уравнения в полных дифференциалах. УК-1
7. Интегрирование уравнения математического маятника, случай $0 < C < 2$. УК-1
8. Интегрирование уравнения математического маятника, случай $C > 2$. УК-1
9. Интегрирование уравнения математического маятника, случай $C = 2$. УК-1
10. Классы уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка. ОПК-1
11. Понятие о дифференциальных уравнениях первого порядка, не разрешенных относительно производной, геометрия, связанная с таким уравнением. ОПК-1
12. Регулярные и особые точки уравнения, не разрешенного относительно производной, теорема о существовании решений на листе регулярных точек. ОПК-1
13. Решение уравнений, не разрешенных относительно производной методом введения параметра, поведение решений около особых точек (на примерах). ОПК-1
14. Фундаментальная система решений для системы с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения. Изложить основную идею построения ф.с.р. и показать реализацию в случае одной жордановой клетки. УК-1
15. Нахождение частного решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами в случае неоднородности в виде векторного квазиполинома. Сформулировать основную идею и показать ее реализацию на примере одной экспоненты. УК-1
16. Теорема существования и единственности решений д.у. первого порядка (доказательство методом Пикара). Указать основные этапы доказательства, какие теоремы анализа используются для построения решения? ОПК-1

17. Формулировка теоремы существования и единственности решений для системы д.у. первого порядка, схема доказательства с указанием необходимых изменений по сравнению со скалярным случаем. **ОПК-1**
18. Понятие о продолжении решений д.у., теорема о продолжении решения, определяемого теоремой Пикара, до границы области определения. **ОПК-1**
19. Теорема существования решений линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, глобальность существования решений. Почему в линейном случае удастся получить решение сразу на всем интервале? **ОПК-1**
20. Теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров. **ОПК-1**
21. Формулировки теорем и их смысл, уравнения в вариациях по начальному условию и параметрам. **УК-1**
22. Гладкость решения по начальным условиям и параметрам. Основная идея доказательства. **ОПК-1**
23. Вывод уравнений в вариациях по начальным условиям и параметру. Начальные условия для решения. **УК-1**
24. Понятие об автономных системах, фазовое пространство, фазовые траектории. Классификация фазовых траекторий. Понятие о задачах теории динамических систем. **УК-1**
25. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовый портрет линейной системы на плоскости в случае фокуса. **УК-1**
26. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовый портрет линейной системы на плоскости в случае узла. **УК-1**
27. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовый портрет линейной системы на плоскости в случае седла. **УК-1**
28. Понятие функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. **ОПК-1**
29. Теорема об устойчивости по Ляпунову по первому приближению. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. **ОПК-1**
30. Понятие об автономных системах, фазовое пространство, фазовые траектории. Классификация фазовых траекторий. Понятие о теории динамических систем. **ОПК-1**

31. Окрестность состояния равновесия автономной системы, поведение траекторий линейной системы на плоскости.

УК-1

32. Первый интеграл системы д.у. Уравнение для поиска интегралов, геометрический смысл первого интеграла. Функционально независимые интегралы. Понижение порядка нормальной системы при помощи первых интегралов.

ОПК-1

33. Существование n независимых первых интегралов в окрестности точки (t_0, x_0) для нормальной системы n неавтономных д.у. первого порядка.

ОПК-1

34. Первые интегралы автономных систем, существование независимых интегралов автономной системы в окрестности неособой точки. Примеры глобального существования первых интегралов в автономной системе.

ОПК-1

35. Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка, его общее решение, связь с первыми интегралами ОДУ.

УК-1

36. Квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка, характеристики, Решения, задача Коши для квазилинейного уравнения.

ОПК-1

5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции УК-1.

- I. Семейство линий $y = Cx^3$ является общим решением дифференциального уравнение:
- 1) $xy' = 3y$; 2) $y^2 + y'^2 = 1$; 3) $x^2y' - xy = yy'$; 4) $y' = 3y^{2/3}$; 5) $y = e^{xy/y}$.
- II. Выражение $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$ - общий интеграл дифференциального уравнения:
- 1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; 3) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 4) $xy' + y = y^2$; 5) $y' = 10^{x+y}$.
- III. Дифференциальное уравнение является однородным:
- 1) $(x+2y-1)dx + xdy = 0$; 2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 3) $(x+y)dx + (y-1)dy = 0$; 4) $(x^2+y)dx - xydy = 0$; 5) $(1-x)dx + (x+y)dy = 0$.
- IV. Функция $\mu(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$ - интегрирующий множитель дифференциального уравнения:
- 1) $(x^2 - y)dx + x(y+1)dy = 0$; 2) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$; 3) $(x^2 - y^2 + y)dx - xdy = 0$; 4) $xy^2(xy' + y) = 1$; 5) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$.
- V. Дифференциальное уравнение $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$ имеет единственное решение при начальных условиях:
- 1) $x_0 = -1, y_0 < 0, y_0' -$ любое; 2) $x_0 = -1, y_0 > 0, y_0' -$ любое; 3) $x_0 \neq -1, y_0 = 0, y_0' = 1$; 4) $x_0 = -1, y_0 = -2, y_0' = 0$; 5) $x_0 = -1, y_0 = 0, y_0' = 0$.
- VI. Функция $y = 0,25x^2$ является особым решением дифференциального уравнения:
- 1) $y = 2xy' - 4y'^2$; 2) $y = xy' - y'^2$; 3) $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$; 4) $xy' - y = \ln y'$; 5) $x = y^2 + y'$.
- VII. Уравнение $y'' - 2y' = 2e^x$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $y(1) = -1, y'(1) = 0$:
- 1) $y = (7 - 3x)e^{x-2}$; 2) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$; 3) $y = e^{2x} - 3e^x - 1$; 4) $y = e^{-x} - e + x - 1$; 5) $y = -2x^2 + 4x + 1$.
- VIII. Выражение $y = x^2e^x$ - частное решение (возможно более низкого порядка) дифференциального уравнения:
- 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 2) $y^{IV} + 2y' + y = 0$; 3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
- IX. Система функций линейно зависима:
- 1) $x+2, x-2$; 2) $6x+9, 8x+12$; 3) $\sin x, \cos x$; 4) $1, x, x^2$; 5) e^x, e^{2x}, e^{3x} .
- X. Уравнением Эйлера является:
- 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.
- XI. Функция $y = x^3$ является решением уравнение:
- 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$; 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.

XII. Функция $f(x, y)$ не удовлетворяет условию Липшица по y на прямой $y = -x$:

- 1) $f(x, y) = x^2 - y^2$; 2) $f(x, y) = x + y$; 3) $f(x, y) = x^2 + y^2$; 4) $f(x, y) = 1 + \sqrt{x + y}$;
5) $f(x, y) = 1 + x + y$.

XIII. Расстояние между соседними нулями уравнения $y'' + 2xy = 0$ на $[20; 45]$ удовлетворяет оценкам:

- 1) $0,5 < d < 1$; 2) $0,33 < d < 0,5$; 3) $0,2 < d < 0,3$; 4) $0,1 < d < 0,2$;
5) $0,31 < d < 0,33$.

XIV. Нулевое решение системы устойчиво:

- 1) $x' = x, y' = 2y$; 2) $x' = 2x, y' = y$; 3) $x' = -x, y' = y$; 4) $x' = -x, y' = -2y$;
5) $x' = x, y' = -y$;

XV. Особая точка $(0, 0)$ системы является седлом:

- 1) $x' = 3x, y' = 2x + y$; 2) $x' = x + 3y, y' = -6x - 5y$; 3) $x' = x, y' = 2x - y$; 4)
 $x' = -2x - 5y, y' = 2x + 2y$; 5) $x' = 3x + y, y' = y - x$.

XVI. Выражение $z = f(x^2 + y^2)$ есть общее решение уравнения:

- 1) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 2) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 3) $2y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 4) $y \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
5) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

I. Функция $y = x + C\sqrt{1 + x^2}$, где $C \in R$, является решением дифференциального уравнения:

- 1) $(xy - 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$; 2) $(xy + 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$;
3) $(xy + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0$.

II. Интегральные кривые уравнения $xy' = 2y$ имеют вид:

- 1) $xy = C$; 2) $y = C + x^2$; 3) $y = Cx^2$.

III. Дифференциальное уравнение является однородным:

- 1) $(x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0$; 2) $xdy = (y + \sqrt{x^2 - y^2})dx$;
3) $(x + 2y)dx - (x + 1)dy = 0$.

IV. Заменой $z = y^{-1}$ к линейному приводится уравнение:

- 1) $y^3 y' - xy = x$; 2) $y' + x^2 y = xy^2$; 3) $y^2 y' - xy = x^2$.

V. Последовательные приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ в задаче Коши $y' = x - y^2, y(0) = 0$ имеют вид:

- 1) $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10}$; 2) $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$;
3) $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}$.

VI. Общим решением уравнения $y''' - \frac{1}{x}y'' = 0$ является:

5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

- 1) $y = x^2 + C_1x + C_2$; 2) $y = C_1x + C_2$; 3) $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$.
- VII. Определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ равен:
1) 1; 2) -1; 3) 0.
- VIII. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:
1) $(x+y)dx + (x-y+1)dy = 0$; 2) $(2x+y)dx + (x-3y+4)dy = 0$;
3) $\left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 - \frac{y-1}{x}\right)dy = 0$.
- IX. Функции $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-2x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения:
1) $y'' + 4y = 0$; 2) $y'' - 4y = 0$; 3) $y'' - 2y = 0$.
- X. Функция $y = x^2$ является частным решением уравнения:
1) $x^3y''' - xy' - 3y = -5x^2$; 2) $x^3y''' - xy' - 3y = x^2$; 3) $x^3y''' + xy' - 3y = x^2$.
- XI. Общим решением системы $\frac{dx}{dt} = x \sin t, \frac{dy}{dt} = x e^{\cos t}$ является:
1) $x = C_1 e^{\cos t}, y = C_1 t + C_2$; 2) $x = C_1 e^{-\cos t}, y = C_1 t + C_2$; 3) $x = C_1 e^{-\cos t}, y = C_1 + C_2 t$.
- XII. Соотношение $\varphi = t^2 + 2xy$, является первым интегралом системы уравнений:
1) $\frac{dx}{dt} = -y, \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - t}{x}$; 2) $\frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x$; 3) $\frac{dx}{dt} = x - y, \frac{dy}{dt} = y - 4x$.
- XIII. Выражение $x = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$ есть общее решение системы:
1) $\frac{dx}{dt} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{dx}{dt} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;
3) $\frac{dx}{dt} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- XIV. Решения системы $\frac{dx}{dt} = -x + \alpha y, \frac{dy}{dt} = \alpha x - y$ асимптотически устойчивы, если:
1) $-2 < \alpha < -1$; 2) $1 < \alpha < 2$; 3) $-1 < \alpha < 1$.
- XV. Функция $V(x, y)$ является знакоопределённой:
1) $V(x, y) = x^2 + y^2$; 2) $V(x, y) = (x + y)^2$; 3) $V(x, y) = x^2 - y^2$.
- XVI. Положение равновесия системы уравнений устойчивый узел:
1) $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y$; 2) $\frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - 4y$; 3) $\frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$.
- XVII. Функция $z = x^3 + y^2 + 1$ есть решения уравнения:
1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

I. Функция $y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$, где $C \in R$, является решением дифференциального уравнения:

$$1) y + xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad 2) y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad 3) y - xy' = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

II. Интегральные кривые уравнения $xy' = -y$ имеют вид:

$$1) y = Cx; \quad 2) y = C + x; \quad 3) xy = C.$$

III. Дифференциальное уравнение является линейным:

$$1) y = xy' + 1; \quad 2) y = xy' + y^2; \quad 3) yy' = x.$$

IV. Решением дифференциального уравнения $y' + y = 2$ являются:

$$1) y = x; \quad 2) y = 2; \quad 3) y = -2.$$

V. Дифференциальное уравнение является однородным:

$$1) \sqrt{x^2 - y^2} dx + x dy = 0; \quad 2) \sqrt{x^2 - y^2} dx + dy = 0; \quad 3) \sqrt{x^2 - y^2} dx + xy dy = 0.$$

VI. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$1) (y^2 + 1) dx - x dy = 0; \quad 2) (x - y) dx + (x + y) dy = 0; \quad 3) (x - y) dx + (-x + y) dy = 0.$$

VII. Функция $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$ - является интегрирующим множителем уравнения:

$$1) \left(1 + \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0; \quad 2) \left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0; \\ 3) \left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0.$$

VIII. Функция линейно зависима:

$$1) 1, x; \quad 2) \sin x, \cos x; \quad 3) \sin^2 x, \cos^2 x.$$

IX. Функции $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения:

$$1) y'' - y = 0; \quad 2) y'' + y = 0; \quad 3) y'' - 4y = 0.$$

X. Особая точка (положение равновесия) системы уравнения является седлом:

$$1) \frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y; \quad 2) \frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y; \quad 3) \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - 4y.$$

XI. Сколько особых точек (положений равновесия) имеет система уравнений

$$- \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 5, \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 13;$$

$$1) 2; \quad 2) 3; \quad 3) 4.$$

- I. Дифференциальным уравнением семейства кривых $x^2 + y^2 = Cx$, где $C \in R$, является уравнение:
 1) $2xyy' = y^2 + x^2$; 2) $2xyy' = y^2 - x^2$; 3) $xyy' = y^2 - x^2$
- II. Интегральные кривые уравнения $y' = 2xy$ имеют вид:
 1) $ye^{x^2} = C$; 2) $y = Ce^x$; 3) $y = Ce^{x^2}$.
- III. Дифференциальное уравнение является линейным:
 1) $xy' = y + x$; 2) $xy' = y^2 + x$; 3) $xy' = \sqrt{y}$;
- IV. Решением дифференциального уравнения $y' + y = -3$ являются:
 1) $y = -x$; 2) $y = 3$; 3) $y = -3$.
- V. Дифференциальное уравнение является однородным:
 1) $\sqrt{x}dx + (x - y)dy = 0$; 2) $ydx - xdy = 0$; 3) $(y + 1)dx + xdy = 0$.
- VI. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах:
 1) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$; 2) $dx + xydy = 0$; 3) $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$.
- VII. Функция $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$ является интегрирующим множителем дифференциального уравнения:
 1) $(x^2 + \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$; 2) $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$;
 3) $(x^2 - \sin^2 y)dx - x \sin 2y dy = 0$.
- VIII. Функции линейно зависимые:
 1) $4 - x, 2x - 8$; 2) e^x, e^{2x} ; 3) $1, x$.
- IX. Функции $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения:
 1) $y'' - 2y = 0$; 2) $y'' + 2y = 0$; 3) $y'' + y = 0$.
- X. Особая точка (положение равновесия) системы является узлом:
 1) $\frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$; 2) $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y$; 3) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$.
- XI. Сколько особых точек (положение равновесия) имеет система уравнений
 $\frac{dx}{dt} = xy + 4, \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17$: 1) 3; 2) 1; 3) 4.
- XII. Функция $V(x, y)$ является знакопеременной:
 1) $V(x, y) = x^4 - y^4$; 2) $V(x, y) = x^2 + y^2$; 3) $V(x, y) = (x + y)^2$;
- XIII. Расстояние между соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения $y'' + 4\pi^2 y = 0$ равно: 1) 1; 2) 0,5; 3) 2.
- XIV. С помощью функции $V(x, y) = x^2 + y^2$ можно установить устойчивость тривиального решения системы:
 1) $x' = x - y, y' = x + y$; 2) $x' = -x + y, y' = -x + y$; 3) $x' = -x + y, y' = -x - y$.
- XV. Нулевое решение системы $\frac{dx}{dt} = -x - \alpha y, \frac{dy}{dt} = -\beta x - y$ асимптотически устойчиво, если:
 1) $\alpha\beta = -1$; 2) $\alpha\beta > -1$; 3) $\alpha\beta < -1$.
- XVI. Функция $u(x, y) = \ln x + y$ является решением уравнения:
 1) $x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; 2) $x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; 3) $x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (4-е изд.). М.: Наука, 1974

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2003 (30 экз.)

б) дополнительная литература:

1. Андронов А.А., Леонтович Е.В., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967

3. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Дифференциальные уравнения (ФМиМ, Математика, МиММ) (Круглов Е.В.)»

<https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=4979>

созданные в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: учебная доска, компьютер, проектор, экран.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ.

Автор д.ф.-м.н., проф. Лерман Л.М.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 01.12.2021 №2.