

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

### **Рабочая программа дисциплины**

Вещественные алгебраические  
многообразия

---

Уровень высшего образования  
бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
01.03.01 Математика

---

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

---

Форма обучения  
очная

---

Нижегород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к вариативной части Б1.В.ДВ.06.02

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.06.02 «Вещественные алгебраические многообразия» относится к части ООП направления подготовки 01.03.01 Математика формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-5  Обладает навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования	<p>ПК-5.1: <b>Знает</b> уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного процесса.</p> <p>ПК-5.2: Умеет применять методы анализа научно-технической информации</p> <p>ПК-5.3: Имеет практический опыт решения задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач</p>	<p><i>Уметь</i> применять основные понятия вещественных алгебраических многообразий для решения типовых задач.</p> <p><i>Знать</i> терминологию и основные результаты теории вещественных алгебраических многообразий.</p> <p><i>Владеть</i> методами теории вещественных алгебраических многообразий.</p>	Собеседование

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

8 семестр	очная форма обучения
Общая трудоемкость	<u>4</u> ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	46
- занятия лекционного типа	22
- занятия семинарского типа	22
самостоятельная работа	98
Промежуточная аттестация – зачет	

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Плоские вещественные алгебраические кривые.	16	3	3		6	10
Тема 2. Метод малого параметра. Кривые Харнака.	32	6	6		12	20
Тема 3. Комплексификация кривой.	20	3	3		6	14
Тема 4. Метод Виро построения вещественных гиперповерхностей.	32	4	4		8	24
Тема 5. Построение кривых методом Оревкова.	42	6	6		12	30
Текущий контроль (КСР)	2					
Промежуточная аттестация зачет						
Итого	144	22	22		44	98

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в форме зачета.

Практическая подготовка предусматривает выполнение проекта, решение прикладной задачи кейса.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Изучение литературы и проработка теоретического материала лекционных занятий.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. **О. Я. Виро**, “Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией”, *Алгебра и анализ*, 1:5 (1989), с. 1-73.
2. **Гудков Д. А.** Начала топологии : метод. разработка. Ч. 1 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1981. - 28 с. - б/ц. Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=93068&idb=0>
3. **Гудков Д. А.** Начала топологии : метод. разработка. Ч. 2 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 32 с. - б/ц. Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92510&idb=0>
4. **Гудков Д. А.** Начала топологии : метод. разработка. Ч. 3 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 32 с. - б/ц. Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92511&idb=0>
5. **Гудков Д. А.** Начала топологии : метод. разработка. Ч. 4 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 28 с. - б/ц. Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92512&idb=0>
6. **Гудков Д. А.** Начала топологии : метод. разработка. Ч. 5 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1983. - 36 с. - б/ц. Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92513&idb=0>
7. **Гудков Д. А.** Начала топологии : метод. разработка. Ч. 6 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1983. - 36 с. - б/ц. Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92514&idb=0>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

**5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

**5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине**

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения., Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки  при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

--	--	--	--	--	--	--	--

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

### 5.2.1 Контрольные вопросы

Вопросы	Код формируемой компетенции
1. Определение вещественной плоской проективной кривой. Проективная классификация коник.	ПК-5
2. Топологические кривые на проективной плоскости.	ПК-5
3. Теорема Безу и следствия из неё.	ПК-5

4. Теорема Харнака. Изотопическая классификация неособых вещественных кривых степени $\leq 6$ .	ПК-5
5. Метод малого параметра.	ПК-5
6. Кривые степени 6 и 7.	ПК-5
7. Комплексификация кривой и комплексные топологические характеристики.	ПК-5
8. Многоугольник Ньютона.	ПК-5
9. Метод Виро построения кривых.	ПК-5
10. Изотопическая классификация неособых вещественных кривых степени 7.	ПК-5
11. Поверхности Хирцебруха.	ПК-5
12. Вещественные тригональные кривые.	ПК-5
13. Метод Оревкова построения тригональных кривых.	ПК-5
14. Жесткие изотопии вещественных тригональных кривых.	ПК-5

### 5.2.2 Типовые задания для оценки сформированности компетенции ПК-5

0.1. (а) Покажите, что  $x$  при фиксированных значениях  $(y, z)$  является кратным корнем уравнения  $x^3 + xy + z = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = -3z/2y$  и  $4y^3 + 27z^2 = 0$ ;

(б) это уравнение имеет 3 простых корня по  $x$  тогда и только тогда, когда  $4y^3 + 27z^2 < 0$ ;

1.1. Параметризируйте конику  $C: (x^2 + y^2 = 5)$  с помощью пучка прямых, проходящих через точку  $(2, 1)$ , и как следствие найдите все рациональные решения уравнения  $x^2 + y^2 = 5$ .

1.2. Пусть  $p$  — некоторое простое число. Поэкспериментируйте с разными  $p$  и угадайте необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение  $x^2 + y^2 = p$  имело рациональные решения.

2.1. Пусть  $C: (y^2 = x^3 + x^2) \subset \mathbb{R}^2$ . Покажите, что любая прямая, проходящая через точку  $(0, 0)$ , пересекает  $C$  еще в одной точке, и получите в качестве следствия рассмотренную в разд. (2.1) параметризацию кривой  $C$ . Прделайте то же самое для  $(y^2 = x^3)$  и  $(x^3 = y^3 - y^4)$ .

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

8. О. Я. Виро, “Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией”, *Алгебра и анализ*, 1:5 (1989), с. 1-73.

9. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 1 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1981. - 28 с. - б/ц.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=93068&idb=0>
10. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 2 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 32 с. - б/ц.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92510&idb=0>
11. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 3 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 32 с. - б/ц.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92511&idb=0>
12. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 4 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1982. - 28 с. - б/ц.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92512&idb=0>
13. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 5 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1983. - 36 с. - б/ц.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92513&idb=0>
14. Гудков Д. А. Начала топологии : метод. разработка. Ч. 6 / ГГУ им. Н. И. Лобачевского, Мех.-мат. фак., Каф. геометрии и высш. алгебры. - Горький : [б. и.], 1983. - 36 с. - б/ц.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=92514&idb=0>

б) дополнительная литература:

1. Полотовский Григорий Михайлович. Очерки истории российской математики / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2015. - 320 с. - ISBN 978-5-91326-330-8 : 176.75.  
Постоянная ссылка на документ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=468590&idb=0>
2. • **Oleg Viro's home page, texts for students.** Introductions to topology of real algebraic varieties. <https://pdmi.ras.ru/~olegviro/es/index.html>
3. • **V. Kharlamov and O. Viro.** Easy reading on topology of real plane algebraic curves. <https://pdmi.ras.ru/~olegviro/introTRAV.html>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)  
<http://www.lib.unn.ru/>

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду



Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Автор (ы): к.ф.-м.н., доц. Звонилов В.И.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф. Золотых Н.Ю.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.