

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.  
Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от  
«30» ноября 2022 г. № 13

## **Рабочая программа дисциплины**

### **Уравнения в частных производных**

Уровень высшего образования  
**специалитет**

Направление подготовки  
**01.05.01 Фундаментальные математика и механика** ☐

Направленность образовательной программы  
**Фундаментальная механика и приложения**

Квалификация (степень)  
**специалист**

Форма обучения  
**очная**

Нижний Новгород

2023

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.16 Уравнения в частных производных относится к обязательной части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине ), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1. Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук.	<b>Знает</b> классификацию уравнений математической физики, основные задачи для уравнений математической физики, общие схемы основных методов математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач	Задача (практическое задание)
	ОПК-1.3. Имеет практический опыт постановки и решения актуальных задач математики и механики.	<b>Имеет навыки</b> математически корректной постановки задач математической физики, исследования корректности постановки задач, применения методов математической физики при решении различных задач	Задача (практическое задание), контрольная работа
ОПК-2. Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1. Знает основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования.	<b>Знает</b> классификацию уравнений математической физики, основные задачи для уравнений математической физики, общие схемы основных методов математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач	Задача (практическое задание)
	ОПК-2.3. Имеет навыки разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности.	<b>Имеет навыки</b> математически корректной постановки задач математической физики, исследования корректности постановки задач, применения методов математической физики при решении различных задач	Задача (практическое задание), контрольная работа

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость	7 ЗЕТ
--------------------	-------

<b>Часов по учебному плану</b>	<b>252</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>131</b>
- занятия лекционного типа	64
- занятия семинарского типа	64
- текущий контроль (КСР)	3
<b>самостоятельная работа</b>	<b>85</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет, экзамен</b>	<b>36</b>

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,  форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего, час.	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них				Самостоятельная работа, час.
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными	1	1			1	
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка	12	4	4		8	4
3. Вывод основных уравнений математической физики	9	3	2		5	4
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера	16	4	6		10	6
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа	16	4	6		10	6
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны.	10	4	2		6	4
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности	14	4	4		8	6
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны	14	4	4		8	6
9. Задача Штурма–Лиувилля	15	4	4		8	7
Текущий контроль	1				1	
<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>						
10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах	18	4	6		10	8
11. Специальные функции математической физики	14	4	4		8	6
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула Пуассона	20	6	6		12	8
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина	22	6	8		14	8
14. Свойства гармонических функций. Тео-	14	6	2		8	6

рема о максимуме и минимуме для гармонических функций						
15. Элементы теории потенциала	18	6	6		12	6
Текущий контроль	2				2	
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	36					
<b>Итого</b>	<b>252</b>	<b>64</b>	<b>64</b>		<b>131</b>	<b>85</b>

Практические занятия (семинарские занятия) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

На проведение практических занятий (семинарских занятий) в форме практической подготовки отводится 64 часа.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП: исследования корректности постановки задач, применения методов математической физики при решении различных задач.
- компетенций – ОПК-1, ОПК-2.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен, зачет).

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности.

##### **4.1. Виды самостоятельной работы**

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы:

- работа над основной и дополнительной литературой;
- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение домашних практических заданий (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение контрольных работ (1 раз в семестр),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен, зачет).

##### **4.2. Контрольные вопросы**

- 1) Задача Коши для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Определить вторые производные от решения на начальной кривой.
- 2) Классификация линейных уравнений с частными производными с  $p$  независимыми переменными.
- 3) Начальная задача для неоднородного волнового уравнения с тремя пространственными переменными. Почему решение называется запаздывающим потенциалом?
- 4) Начальная задача для неоднородного волнового уравнения.
- 5) Начальная задача для трехмерного волнового уравнения методом сферических средних.
- 6) Определение объемного потенциала. Доказательство его свойств.
- 7) Определение потенциала двойного слоя, его свойства. Как используется потенциал двойного слоя для решения задачи Дирихле?
- 8) Определение сферического среднего. Перечислите его свойства.

- 9) Определение функции Бесселя.
- 10) Основные свойства гармонических функций.
- 11) Постановка задачи Гурса.
- 12) Теорема о непрерывной зависимости решения смешанной задачи для уравнения гиперболического типа от начальных данных.
- 13) Теорема существования решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа.
- 14) Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле.
- 15) Физическая интерпретация формулы Пуассона.
- 16) Формулировка и доказательство теоремы единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности.
- 17) Функция Грина задачи Дирихле. Доказать ее свойства.

#### 4.3. Задания для самостоятельной работы

1. Привести к каноническому виду уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .
2. Привести к каноническому виду уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .
3. Привести к каноническому виду уравнение  $(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .
4. Решить задачу. Определить тип задачи  
 $u_{tt} = u_{xx} + x \quad (0 < x < \pi), u_{x=0} = 0, u_{x=\pi} = 0, u_{t=0} = \sin 2x, u_{t=t=0} = 0$ .
5. Струна бесконечной длины  $x > 0$  находилась в состоянии равновесия. При  $t > 0$  точка  $x = 0$  совершает малые колебания  $A \sin \omega t$ . Показать, что смещение точки с абсциссой  $x > 0$  определяется формулой

$$u(x, t) = \{0, t < x/a$$

6. Однородная струна, закрепленная на концах  $x = 0$  и  $x = l$ , имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку  $x = l/2$ . Определить смещение точек струны от положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.
7. Однородная квадратная мембрана, имеющая в начальный момент времени  $t = 0$  форму  $Axy(b-x)(b-y)$ , где  $A$  – постоянная, начала колебаться без начальной скорости. Исследовать свободные колебания мембраны, закрепленной по контуру.
8. Решить методом разделения переменных  
 $u_{tt} = u_{xx} + 2b \quad (b = \text{const}, 0 < x < l), u_{x=0} = 0, u_{x=l} = 0, u_{t=0} = u_{t=t=0} = 0$ .
9. Решить методом разделения переменных  
 $u_{tt} = u_{xx} + \cos t \quad (0 < x < \pi), u_{x=0} = 0, u_{x=\pi} = 0, u_{t=0} = u_{t=t=0} = 0$ .
10. Решить смешанную задачу  
 $u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1 \quad (0 < x < 1), u_{x=0} = 0, u_{x=1} = 0, u_{t=0} = u_{t=t=0} = 0$ .
11. Решить смешанную задачу  
 $u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1), u_{x=0} = 1, u_{x=1} = 0, u_{t=0} = 0$ .
12. Решить смешанную задачу  
 $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x \quad (0 < x < \pi/2), u_{x=0} = 0, u_{x=\pi/2} = 0, u_{t=0} = 0$ .

Самостоятельная работа студентов обеспечивается доступными учебной и научной литературой, интернет-ресурсами, которые содержат теоретический материал с иллюстрирующими примерами и упражнения для самостоятельного выполнения, достаточные для подготовки к зачету и экзамену и освоения дисциплины в целом.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Инди- каторы компе- тенции	Оценка сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетвори- тельно	удовлетвори- тельно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
Знания	отсутствие знаний мате- риала	наличие грубых ошибок в ос- новном матери- але	знание основ- ного материа- ла с рядом негрубых ошибок	знание основ- ного материа- ла с рядом заметных по- грешностей	знание основ- ного материа- ла с незначи- тельными по- грешностями	знание ос- новного материала без ошибок и погреш- ностей	знание основ- ного и допол- нительным материала без ошибок
Умения	полное отсут- ствие умений	недостаточно умений	умение ис- пользовать отдельные приемы при наличии су- щественных ошибок	умение исполь- зовать отдель- ные приемы при наличии незначитель- ных ошибок	умение ис- пользовать отдельные приемы	умение ис- пользовать приемы	умение ис- пользовать приемы и способность принимать решение на этой основе
Навыки	полное отсут- ствие навыков	отсутствие навыков	наличие ми- нимальных навыков	посредственное владение навы- ками	достаточное владение навыками	хорошее владение навыками	всестороннее владение навыками

#### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетвори- ю	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетво- рительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.2. Типовые контрольные задания для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций, и контроля сформированности компетенций

#### 5.2.1. Примеры задач (практических заданий) для текущего контроля

1. (ОПК-1) Найти наибольшую область, в которой задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

$$x^2 U_{xx} - y^2 U_{yy} - 2xU_x = 0$$

$$U_{y=1} = x, -2 < x < 1, U_{y=-1} = x, -2 < x < 1.$$

2. (ОПК-2) Полуограниченной струне с жестко закрепленным концом  $x = 0$  сообщена начальная скорость равная  $v_0$  на отрезке  $[c, 2c]$  и нулю вне этого отрезка. Построить профиль струны в момент времени  $t_0 = \frac{c}{a}$ . Расписать формулы, описывающие профиль струны в момент времени  $t_0 = \frac{5c}{3}$ .

### 5.2.2. Варианты контрольных работ

#### Вариант контрольной работы №1

1. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ( $x=0$ ) свободен, а другой ( $x=\pi$ ) закреплен жестко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$U|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad U_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}$$

2. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на конце  $x=0$  и подверженной на конце  $x=l$  действию силы  $Asin\omega t$ . Начальные условия нулевые. Найти решение при всех  $0 < t < 3l/2a$

#### Вариант контрольной работы №2

1. К струне, один конец которой ( $x=0$ ) свободен, а другой ( $x=l$ ) закреплен жестко, с момента времени  $t=0$  приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью  $f(x,t)=Asin\omega t$ . Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.
2. Найти стационарную температуру в круглом цилиндре с радиусом основания  $r_0$  и высотой  $h$ , если температуры нижнего и верхнего оснований равны соответственно  $T_0$  и  $T_0(1 - \frac{r}{r_0})$ , а боковая поверхность цилиндра теплоизолирована.

### 5.2.3. Примеры вопросов, выносимых на экзамен, зачет

ОПК-1 Задача Коши для уравнений свободных колебаний струны. Формула Даламбера для решения задачи Коши

ОПК-2 Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных

### 5.2.4. Примеры задач (практических заданий), выносимых на экзамен, зачет

ОПК-1 Получить функцию Грина для шара.

ОПК-2 Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

### 5.2.5. Пример экзаменационного билета

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

Дисциплина Уравнения математической физики

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

1. Задача Штурма – Лиувилля. Свойство решений задачи. Ортогональность



собственных функций, соответствующих различным собственным значениям (с доказательством).

2. Задача о колебаниях полубесконечной струны с закрепленным концом. Метод продолжения.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Калинин А.В.

Экзаменатор \_\_\_\_\_ Калинин А.В.

---

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **6.1. Основная литература**

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. (75)
2. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Минск, 1964. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
3. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией Владимиров В.С. – М.: Наука, 1982. – 256с. (83)
4. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Введение в современные методы математической физики: Эл. учебное пособие. ННГУ. 2014. 120 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Рег. № 864.14.06)
5. Жидков А.А., Калинин А.В., Тюхтина А.А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными. Эл. уч.-мет. пособие. ННГУ. 2012. 82 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Рег. № 488.12.06)

### **6.2. Дополнительная литература**

6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: 1984. (35)
7. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 252с. [https://e.lanbook.com/book/70703?category\\_pk=917#authors](https://e.lanbook.com/book/70703?category_pk=917#authors)
8. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 688с. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
9. Калинин А.В., Дерендяев Н.В. Проекционный метод Фурье. Эл. уч.-мет. пособие. ННГУ. 2012. 75 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Рег. № 523.12.08)

### **6.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)
3. Библиотека Лань (<https://e.lanbook.com/>).

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Автор профессор А.В. Калинин

Заведующий кафедрой А.В.Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30.11.2022 года, протокол № 3.