

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования\_  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совета ННГУ

протокол № 1 от 16.01.2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Численные методы решения краевых задач

---

Уровень высшего образования

Магистратура

---

Направление подготовки / специальность

01.04.01 - Математика

---

Направленность образовательной программы

Фундаментальная математика и приложения

---

Форма обучения

очная

---

г. Нижний Новгород

2024 год начала подготовки

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.19 Численные методы решения краевых задач относится к обязательной части образовательной программы.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-1: Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики	<p>ПК-1.1: Знает математические и численные методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания.</p> <p>ПК-1.2: Умеет строить логические последовательные цепочки рассуждений, формулировать промежуточные и окончательные результаты, находить эквивалентные формулировки математических утверждений, понимать полноту математического доказательства.</p> <p>ПК-1.3: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований или производственной деятельности.</p>	<p>ПК-1.1: Знать математические и численные методы решения краевых и начально-краевых задач математической физики, а также задачи естествознания, математическими моделями которых являются краевые и начально-краевые задачи математической физики</p> <p>ПК-1.2: Уметь правильно проводить предварительные аналитические преобразования, необходимые для применения метода конечных элементов и метода конечных разностей, а также для оценки погрешности, при численном решении краевых и начально-краевых задач математической физики.</p> <p>ПК-1.3: Владеть навыками математических преобразований, необходимых для применения метода конечных элементов и метода конечных разностей, а также для оценки погрешности, при численном решении краевых и начально-краевых задач математической физики.</p>	Задачи Проектная работа Собеседование	Экзамен: Контрольные вопросы

--	--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1 Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость, з.е.</b>	<b>3</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>16</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>38</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b> <b>Экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Алгоритмы приближенного решения систем алгебраических уравнений, численное дифференцирование и интегрирование	13	3	3	6	7
Методы Бубнова-Галёркина и Ритца. Вариационная формулировка краевых задач	13	3	3	6	7
Метод конечных элементов для эллиптических уравнений	14	3	3	6	8
Применение метода конечных элементов для приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными	16	4	4	8	8
Сходимость сеточных методов	14	3	3	6	8
Аттестация	36				
КСР	2				2
Итого	108	16	16	34	38

#### Содержание разделов и тем дисциплины

1. Алгоритмы приближенного решения систем алгебраических уравнений, численное дифференцирование и интегрирование.
2. Методы Бубнова-Галёркина и Ритца. Вариационная формулировка краевых задач.
3. Метод конечных элементов для эллиптических уравнений.
4. Применение метода конечных элементов для приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными.
5. Сходимость сеточных методов.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Чернов А.В. Численная реализация метода конечных элементов в системе MATLAB. Н.Новгород: ННГУ, 2016 (42).
2. Чернов А.В. Численное решение распределенных задач оптимизации методом параметризации управления. Н.Новгород: ННГУ, 2014 (70).
3. Чернов А.В. Применение системы MatLab к решению простейшей задачи вариационного исчисления: описание лабораторной работы. Н.Н.: ННГУ, 2007 (85).

#### **5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

**5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:**

**5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-1:**

Задача 1. Пусть вершины плоского треугольника заданы своими координатами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \text{ Докажите, что } |\Delta| \text{ равен удвоенной площади этого треугольника.}$$

Задача 2. Пусть  $\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$

$$H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i). \text{ Докажите, что } H_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Задача 3. Пусть  $\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$

$$H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i). \text{ Докажите, что } \sum_{i=1}^3 H_i(x, y) = 1. \text{ Как называются указанные функции при использовании треугольных конечных элементов.}$$

Задача 4. Пусть  $z = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$ ,  $\Omega$  – область, ограниченная эллипсом  $z(x, y) = 0$ . Вычислите производную данной функции по единичному вектору внешней нормали к границе области  $\Omega$ .

Задача 5. Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, c = 3, g = 3 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{4x}{a^2} - \frac{4y}{b^2},$

$$\vec{f} = \left( \frac{x^3}{a^2}, \frac{y^3}{b^2} \right)^T. \text{ Убедитесь, что функция } z = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \text{ является решением уравнения}$$

$$- \operatorname{div}(A \nabla z + z a) + b \cdot \nabla z + c z = g - \operatorname{div} \vec{f}.$$

Задача 6. Пусть

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i),$$

$\Omega$  – треугольник с вершинами  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ . Вычислите интеграл  $\int_{\Omega} H_1(x, y) dx dy$ .

### Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Выполнены все или большая часть этапов решения задачи или задача решена с незначительными недочетами. Результаты работы представлены преподавателю в срок.
не зачтено	Выполнены не все практические задания или выполнены не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения задания, получен неверный ответ, результаты работы не представлены преподавателю).

### 5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Проектная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-1:

Темы проектных работ:

1. Методика выбора базисных функций в методе конечных элементов.
2. Реализация метода конечных элементов при приближенном решении дифференциальных уравнений с частными производными.
3. Теоретическое и практическое исследование сходимости метода конечных элементов.

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Проектная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Проектная работы выполнена в полном объеме или с незначительными недочетами. Результаты работы представлены преподавателю в срок.
не зачтено	Проектная работа выполнена не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения работы, получен неверный ответ, результаты работы не представлены преподавателю).

### 5.1.3 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-1:

Вариант 1

1. Доказать линейную независимость функций  $\varphi_1(t) = t(1-t)$ ,  $\varphi_2(t) = t^2(1-t)$ .
2. Найти условия принадлежности данной точки данному треугольнику.
3. Какой порядок погрешности имеет формула  $u_{n\pm 1}^{II} \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$ , где  $h$  – постоянный шаг одномерной сетки?

#### Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Студент дал развернутый ответ на все вопросы без существенных ошибок.
не зачтено	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале.

### 5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

## Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

## Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
--------	--------------------

<b>зачтено</b>	<b>превосходно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	<b>отлично</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	<b>очень хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	<b>хорошо</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	<b>удовлетворительно</b>	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
<b>не зачтено</b>	<b>неудовлетворительно</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	<b>плохо</b>	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

### 5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

#### 5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-1

1. Основные методы численного дифференцирования
2. Основные методы численного интегрирования
3. Численное дифференцирование и интегрирование в системе MATLAB
4. Решение задачи Коши для системы ОДУ методом Эйлера
5. Решение задачи Коши для системы ОДУ методом Рунге-Кутты
6. Понятие о методах взвешенных невязок: метод коллокаций.
7. Понятие о методах взвешенных невязок: метод наименьших квадратов.
8. Понятие о методах взвешенных невязок: метод Галеркина.
9. Слабая формулировка понятия решения дифференциального уравнения.
10. Использование кусочно линейных базисных функций в слабом варианте метода Галеркина.
11. Переформулировка слабого метода Галеркина в терминах конечных элементов.
12. Понятие о вариационных методах. Метод Рэля-Ритца.



13. Метод конечных элементов (МКЭ) в формулировке Рэлея-Ритца.
14. Основные этапы МКЭ.
15. Структура программы, реализующей МКЭ.
16. Описание входных данных для программы, реализующей МКЭ.
17. Локальные матрицы и векторы нагрузки в МКЭ и их сборка в глобальную матрицу и глобальный вектор.
18. Применение ограничений в МКЭ.
19. Краевые задачи для двумерного уравнения Пуассона. Постановки задач и переход к слабой формулировке.
20. Треугольный конечный элемент.
21. Программирование МКЭ для решения задачи Дирихле.
22. Программирование МКЭ для смешанной задачи Дирихле-Неймана.
23. Особенности программирования МКЭ для эллиптического уравнения в дивергентной форме.
24. Краевые задачи для уравнения теплопроводности. Постановки задач и переход к слабой формулировке.
25. Методы правой и левой разностной производной.
26. Метод Кранка-Николсон.
27. Программирование МКЭ и метода Кранка-Николсон.
28. Особенности программирования системы уравнений теплопроводности.
29. Понятие о триангуляции Делоне. Построение триангуляции в системе MATLAB.
30. Построение линий уровня функции, заданной на триангуляции.
31. Решение задачи Гурса-Дарбу методом конечных разностей.
32. Решение задачи Коши-Дарбу методом конечных разностей.
33. Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом конечных разностей.
34. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом конечных разностей.

**Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)**

Оценка	Критерии оценивания
превосходно	Студент дал развернутый ответ на все вопросы и при этом продемонстрировал знание дополнительного материала.
отлично	Студент дал развернутый ответ на все вопросы.
очень хорошо	Студент дал ответ на все вопросы, возможно с незначительными недочетами.
хорошо	Студент ответил на большую часть вопросов с незначительными недочетами.
удовлетворительно	Студент ответил на большую часть вопросов с существенными недочетами.
неудовлетворительно	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале и решении стандартных задач.
плохо	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач.

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

Основная литература:

1. Самарский Александр Андреевич. Теория разностных схем : [учеб. пособие для вузов по специальности "Приклад. математика"]. - 2-е изд., испр. - М. : Наука, 1983. - 616 с. - 1.60., 3 экз.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Бином. Лаборатория знаний, 2003. - 632 с. : ил. - (Технический университет). - ISBN 5-94774-060-5 : 165.00., 45 экз.

Дополнительная литература:

1. Вержбицкий Валентин Михайлович. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для вузов. - М. : Высшая школа, 2001. - 382 с. : ил. - ISBN 5-06-003982-X : 65.34., 11 экз.
2. Формалев В. Ф. Численные методы / Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 400 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 5-9221-0479-9.,  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=695923&idb=0>.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. <http://www.lib.unn.ru/ebs.html>
2. MATLAB

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.04.01 - Математика.

Автор(ы): Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент.

Заведующий кафедрой: Иванченко Михаил Васильевич, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 13.12.2023, протокол № 3.