

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «30» ноября 2022 г. № 13

### **Рабочая программа дисциплины**

**Дискретные динамические системы в низких  
размерностях**

(наименование дисциплины (модуля))

**Уровень высшего образования  
магистратура**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

**Направление подготовки / специальность  
01.04.01 – Математика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

**Направленность образовательной программы  
Фундаментальная математика и приложения/ магистерская программа**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

**Форма обучения**

**очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

\_\_\_2023\_\_\_год

**1. Место дисциплины в структуре ОПОП**

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений,  
Б1.В.ДВ.01.02 – Дискретные динамические системы в низких размерностях

**2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)**

<b>Формируемые компетенции</b> (код, содержание компетенции)	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции</b>		<b>Наименование оценочного средства</b>
	<b>Индикатор достижения компетенции*</b> (код, содержание индикатора)	<b>Результаты обучения по дисциплине**</b>	
<b>ПК-5.</b> Способен составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию	<b>ПК-5.1.</b> Знать специфику научных обзоров.	<i>Знает основные источники происхождения и базовые понятия теории дискретных динамических систем в низких размерностях.</i>	<i>Собеседование</i>
	<b>ПК-5.2.</b> Уметь составлять научные обзоры, рефераты и отчеты по тематике проводимых исследований, а также подготовить научную публикацию.	<i>Умеет проводить доказательства основных теорем теории дискретных динамических систем в низких размерностях.</i>	<i>Решение задач</i>
	<b>ПК-5.3.</b> Владеть способностью по составлению научных обзоров, рефератов и отчетов по тематике проводимых исследований.	<i>Владеет основными методами исследования дискретных динамических систем в низких размерностях</i>	<i>Решение задач</i>
<b>ПК-6.</b> Обладает	<b>ПК-6.1.</b> Знать	<i>Знает основные понятия теории дискретных динамических систем,</i>	<i>Собеседование</i>

<p>навыками преподавания математики и информатики в средней школе, специальных учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования</p>	<p>уровень подготовки и психологию обучающихся при организации учебного процесса.</p> <p><b>ПК-6.2.</b> Уметь учитывать уровень подготовки и психологию обучающихся.</p>	<p>базовые модели и их свойства. Понимает математическое единство всех рассматриваемых понятий и свойств дискретных систем в низких размерностях, а также понимать взаимосвязь дискретных динамических систем с динамическими системами с непрерывным временем.</p> <p>Умеет применять теоретические знания для решения задач теории дискретных динамических систем в низких размерностях, исследовать асимптотическое поведение траекторий.</p>	Решение задач
	<p><b>ПК 6.3.</b> Владеть навыками преподавания математики и информатики в средней школе, средних специальных и высших учебных заведениях.</p>	<p>Владеет техникой доказательства математических утверждений и методами исследования асимптотического поведения траекторий, обладающих различными свойствами возвращаемости</p>	Решение задач

*\*Индикатор достижения компетенции – указывается из таблиц п.4.1. Общей характеристики ООП,*

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	_3_ ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	33
- занятия лекционного типа	16
- занятия семинарского типа	16
- занятия лабораторного типа	0
- КСРИФ	1
самостоятельная работа	75
Промежуточная аттестация – экзамен/зачет	зачет

### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий по семестрам)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
<b>Введение в теорию дискретных динамических систем. Подходы, основанные на понятиях типичного свойства и топологической сопряженности. Программа Смейла-Палиса.</b>	16	4	4		8	8
<b>Классификация траекторий по свойству возвращаемости. Исследование асимптотического поведения траекторий.</b>	18	4	4		8	10
<b>Введение в гиперболическую теорию.</b>	19	4	4		8	11
<b>Одномерные модели и их обобщения</b>	18	4	4		8	10
Текущий контроль (КСР)	1				1	
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>16</b>	<b>16</b>		<b>33</b>	<b>39</b>

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа, групповых консультаций

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (зачет)

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся \_Виды самостоятельной работы:

1. Освоение теоретического материала, работа над конспектами лекций с использованием основной литературы и дополнительной литературы, указанной в п.6.
2. Подготовка к семинарам, собеседованиям, практическим работам по решению задач с использованием литературы, указанной в п.6, с решением задач, сформулированных на лекциях, ответами на контрольные вопросы.
3. Выполнение исследовательских работ (см. п.5.2.4).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

(при использовании традиционных форм аттестации (зачет, экзамен) шкалы оценивания могут быть «зачет-незачет», «зачет с оценкой», «оценка» по семибалльной и пятибалльной шкалам).

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка	Уровень подготовки
--------	--------------------

зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

(ЗАПОЛНИТЬ согласно оценочным средствам табл.2)

### 5.2.1 Контрольные вопросы

вопросы	Код формируемой компетенции
1. Приведите примеры автономных систем дифференциальных уравнений 1.1. с указанием отображения сдвига по траекториям; 1.2. допускающих секущую Пуанкаре. Во втором случае постройте отображение последования на секущей Пуанкаре.	ПК-5
2. Докажите полноту пространства $C^1(M)$ , $r \geq 0$	ПК-6
3. Приведите примеры всюду плотных; граничных; нигде не плотных множеств в $R^n$ , $n \geq 1$ ; укажите множество 1-ой категории в $R^n$ , $n \geq 1$ .	ПК-6
4. Сформулируйте определение дискретной динамической системы. Приведите пример дискретных динамических систем, образующих множество 1-ой категории в $C^1(S^1)$ .	ПК-6
5. Сформулируйте принцип Боля-Брауэра. Приведите пример применения к исследованию существования	ПК-5

состояний равновесия в автономных системах дифференциальных уравнений.	
6. Приведите примеры дискретных динамических систем в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$ , имеющих гиперболические периодические точки периода 2.	ПК-5, ПК-6
7. Проведите классификацию гиперболических периодических точек. Приведите примеры дискретных динамических систем в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$ , имеющих неподвижные точки-стоки, источники, седла.	ПК-5, ПК-6
8. Приведите примеры дискретных динамических систем в $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$ , имеющих эллиптические неподвижные точки.	ПК-5, ПК-6
9. Приведите пример дискретной динамической системы в $\mathbb{R}^2$ , имеющей подкову Смейла. Используя гомеоморфизм сдвига, опишите динамику отображения на подкове Смейла.	ПК-5, ПК-6
10. Приведите пример гиперболического автоморфизма двумерного тора.	ПК-5, ПК-6
11. Для заданного непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего периодическую точку периода 7, укажите граф периодической орбиты периода 7. По построенному графу опишите множество периодических точек, которые имеет заданное отображение.	ПК-5, ПК-6
12. Приведите доказательство обобщенной теоремы А.Н.Шарковского для косых произведений отображений интервала.	ПК-5, ПК-6

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции \_

1. Что такое граф периодической орбиты непрерывного отображения отрезка в себя? (ПК-5, ПК-6)
2. Какова взаимосвязь между структурой графа периодической орбиты и периодом орбиты, существующей у непрерывного отображения отрезка? (ПК-5, ПК-6)
3. Периодические орбиты каких периодов имеет непрерывное отображение отрезка в себя, содержащее периодическую орбиту периода 10? (ПК-5, ПК-6)

4. Существуют ли гомеоморфизмы окружности, имеющие периодические орбиты периодов 3 и 5 одновременно? (ПК-5, ПК-6)
5. Существуют ли эндоморфизмы окружности с периодическими орбитами периодов 3 и 5? Приведите необходимые объяснения. (ПК-5, ПК-6)
6. Верно ли утверждение теоремы А.Н. Шарковского для произвольного непрерывного отображения плоскости? Ответ подтвердите примерами. (ПК-5, ПК-6)
7. Сформулируйте определение и приведите пример неавтономной дискретной динамической системы (ПК-5, ПК-6).
8. Что такое отображение сдвига на пространстве односторонних последовательностей и единиц? Приведите пример отображения окружности в себя, допускающего описание с помощью такого гомеоморфизма сдвига (ПК-5, ПК-6).
9. Приведите пример непрерывного отображения отрезка или окружности, имеющего нигде не плотное омега-предельное множество (ПК-5, ПК-6).
10. Существуют ли счетные омега-предельные множества у гомеоморфизмов окружности, у растягивающих эндоморфизмов окружности? Ответ обоснуйте (ПК-5, ПК-6).

### 5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции

1. Докажите, что tent-отображение имеет периодические точки всех периодов (ПК-5, ПК-6).
2. Докажите, что омега-предельные точки непрерывного отображения отрезка являются неблуждающими (ПК-5, ПК-6).
3. Постройте пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего неблуждающие, но не омега-предельные точки (ПК-5, ПК-6).
4. Постройте граф периодической орбиты  $B = b_1 < b_2 < b_3$  произвольного непрерывного отображения отрезка. Периодические точки каких периодов содержит построенное отображение? (ПК-5, ПК-6)
5. Докажите лемму о замыкании для непрерывного отображения отрезка (ПК-5, ПК-6).
6. Докажите, что периодические точки гиперболического автоморфизма тора всюду плотны на торе (ПК-5, ПК-6).
7. Опишите сценарий бифуркаций удвоения периода периодических точек в семействе логистических отображений (ПК-5, ПК-6).
8. Приведите пример однопараметрического семейства косых произведений отображений интервала, допускающего бифуркации удвоения периода с появлением двух периодических орбит периода 2 (ПК-5, ПК-6)
9. Докажите свойство локальной устойчивости гиперболических периодических точек (ПК-5, ПК-6).
10. Постройте пример непрерывного отображения отрезка с замкнутым множеством периодических точек, имеющего периодические точки всех периодов  $2^i$  при всех  $i \geq 0$  (ПК-5, ПК-6).

### 5.2.4. Темы курсовых работ, эссе, рефератов

1. Минимальные косые произведения на клетках и торах (ПК-5, ПК-6).
2. О нехаотических аттракторах косых произведений (ПК-5, ПК-6).



3. О сохранении свойства интегрируемости при малых гладких возмущениях косых произведений (ПК-5, ПК-6).
4. Об отображениях следа, заданных квадратичными и кубическими отображениями плоскости (ПК-5, ПК-6).
5. Основные подпространства пространства гладких косых произведений отображений интервала (ПК-5, ПК-6).

Оценочные средства используются в соответствии с «Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ» от 13.02.2014.

[http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest\\_stud%202014.pdf](http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf)

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. М.-Л.:ОГИЗ, 1947. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. М.-Л.:ОГИЗ, 1947. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

3. Плисс В.А. *Нелокальные проблемы теории колебаний*. М.-Л.: Наука, 1964.

Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

б) дополнительная литература:

4. Аносов Д.В. (ред.) *Гладкие динамические системы (Сборник переводов, Математика в зарубежной науке №4)*. М.: Мир, 1977. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

5. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции*. М.: ГИТТЛ, 1953.

Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

6. Сибирский К.С. *Введение в топологическую динамику*. Кишинев, 1970. Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

7. Хьюзмоллер Д., *Расслоенные пространства*. М.: Мир, 1970 Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

8. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И., *Математические аспекты классической и небесной механики*. М.: ВИНТИ, 1985.

Библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):  
библиотека MathNet.ru <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий,

предусмотренных программой.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика.

Автор (ы) Ефремова Л.С.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 30 ноября 2022 года, протокол № 3.