

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт экономики и предпринимательства
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«14» декабря 2021 г. № 4

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

38.03.01 Экономика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Мировая экономика (на английском языке)

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2022 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина Б1.О.12 «Линейная алгебра» изучается студентами во 2 семестре, трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.12 «Линейная алгебра» относится к обязательной части ООП направления подготовки 38.03.01 Экономика.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Четко описывает состав и структуру требуемых данных и информации, грамотно реализует процессы их сбора, обработки и интерпретации.	<i>Знать</i> содержание основных понятий линейной алгебры, основные приемы работы с системами уравнений, матрицами, векторами. <i>Уметь</i> использовать инструментарий линейной алгебры в решении стандартных задач профессиональной деятельности <i>Владеть</i> приемами решения задач, методами использования средств линейной алгебры в решении стандартных задач профессиональной деятельности	<i>Тесты, задачи</i>
ОПК-5. Использует современные информационные технологии и программные средства при решении профессиональных задач	ОПК 5.1. Осуществляет выбор инструментальных и программных средств для решения профессиональных задач	<i>Знать</i> стандартные экономико-математические модели и задачи, решаемые средствами линейной алгебры <i>Уметь</i> применять стандартные экономико-математические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты <i>Владеть</i> навыками использования	<i>Тесты, задачи</i>

		современных информационных технологии и программных средств при решении профессиональных задач	
--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения	очно-заочная форма обучения	заочная форма обучения
Общая трудоемкость	_2_ ЗЕТ	___ ЗЕТ	___ ЗЕТ
Часов по учебному плану	72		
в том числе			
аудиторные занятия (контактная работа):	32		
- занятия лекционного типа	16		
- занятия семинарского типа	16		
(практические занятия / лабораторные работы)			
самостоятельная работа	39		
КСР	1		
Промежуточная аттестация – экзамен/зачет	зачет		

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)			В том числе															Самостоятельна я работа обучающегося, часы		
				Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них																	
	Очная	Очно-заочная	Заочная	Занятия лекционного типа			Занятия семинарского типа			Занятия лабораторного типа			Консультации			Всего					
				Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная			
Тема1. Матрицы и определители. Понятие матрицы произвольного порядка. Действия над матрицами. Виды матриц. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителя. Обратная матрица. Ранг матрицы. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях матриц. Теоремы о связи ранга с числом линейно независимых строк, о представлении строки в виде линейной комбинации независимых строк.	18			4			4								8			10			
Тема 2. Системы линейных уравнений. Балансовый анализ. Виды СЛУ. Решения СЛУ. Система линейных уравнений в матричной форме. Метод решения линейных систем, у которых число уравнений равно числу переменных, переходом к обратной матрице. Правило Крамера решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Схема решения СЛУ. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные решения. Общее решение неоднородной СЛУ. Балансовые модели в экономике.	18			4			4								8			10			
Тема 3. Векторная алгебра. Геометрический вектор. Основные понятия.	8			2			2								4			4			

Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов.Ось, числовая ось, проекция вектора на ось. Декартов базис в пространстве и на плоскости и декартова система координат. Координаты вектора. Модуль (длина) вектора в координатах. Линейные операции в координатах. Скалярное произведение в координатах.																				
Тема 4. Линейные пространства и линейные операторы. Понятие линейного векторного пространства. Векторы в n-мерном евклидовом пространстве. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность векторного пространства. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису. Матрица перехода. Линейные операторы и их свойства. Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.	12			2			2								4			8		
Тема 5. Элементы аналитической геометрии. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Полуплоскость. Уравнение плоскости. Полупространство. Кривые второго порядка и их канонические уравнения.	15			4			4								8			7		
Текущий контроль	1																			
Итого	72			16			16								32			39		
Промежуточный контроль - Зачет																				

План семинарских занятий

Тема 1. Матрицы и определители (4 часа)

Семинар 1. Действия над матрицами. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях. Вычисление определителей (решение задач).

Семинар 2. Методы нахождения обратной матрицы. Матричные уравнения (решение задач).

Тема 2. Системы линейных уравнений. Балансовый анализ. (4 часа)

Семинар 3. Решение определенных систем линейных уравнений методом Крамера и с помощью обратной матрицы.

Семинар 4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение однородных систем линейных уравнений. Модель межотраслевого баланса Леонтьева (по результатам самостоятельного решения задач с применением ППП Excel).

Тема 3. Векторная алгебра (2 часа)

Семинар 5. Этапы решения задач векторным методом (разбор примеров).

Тема 4. Линейные пространства и линейные операторы (4 часа)

Семинар 6. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис векторного пространства. Матрица перехода к другому базису.

Семинар 7. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии (2 часа)

Семинар 8. Задачи на нахождение уравнений прямой, плоскости и кривых второго порядка.

Практические занятия (семинарские занятия) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью. Практическая подготовка предусматривает: решение задач, тестов.

На проведение практических занятий (семинарских занятий) в форме практической подготовки отводится 6 часов.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП;
- компетенции *ОПК-5 Использует современные информационные технологии и программные средства при решении профессиональных задач.*

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Значительное место при изучении дисциплины отводится самостоятельной работе студентов, ее объем определен учебным планом, самостоятельная работа является внеаудиторной и обязательна для каждого студента.

Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами курса по рекомендованным материалам и подготовки к выполнению индивидуальных заданий по курсу. Самостоятельная работа ведется по рекомендованным педагогом материалам и направлена на выполнение различных типов заданий по курсу.

Самостоятельная работа студентов включает:

- изучение понятийного аппарата дисциплины;
- изучение тем самостоятельной подготовки по учебно-тематическому плану;
- работу над основной и дополнительной литературой;
- самоподготовка к практическим и другим видам занятий;
- подготовка контрольных работ (домашних заданий);
- самостоятельная работа студента в библиотеке;
- подготовку к выполнению заданий и тестирования;
- самостоятельная работа студента при подготовке к зачету.

Основным принципом организации самостоятельной работы студентов является комплексный подход, направленный на развитие критического мышления студентов и стимулирование диверсифицированных видов деятельности.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

Для обеспечения самостоятельной работы обучающихся используется электронный курс «Линейная алгебра» (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=5276>), созданный в системе электронного обучения ННГУ - <https://e-learning.unn.ru/>.

4. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	ошибки.	ошибки.	Допущено несколько негрубых ошибок	несколько несущественных ошибок	без ошибок.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне, выше предусмотренного программой
зачтено	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»

	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопрос	Код компетенции (согласно РПД)
1. Матрицы. Действия над матрицами. Элементарные преобразования матриц. (см. [1] списка литературы РПД, стр. 5-7)	УК-1, ОПК-5
2. Определитель квадратной матрицы. (см. [1], стр. 62)	УК-1, ОПК-5
3. Алгоритм поиска обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. (см. [1], стр. 57)	УК-1, ОПК-5
4. Теорема Лапласа. (см. [1], стр. 62)	УК-1, ОПК-5
5. Свойства определителей. (см. [1], стр. 64)	УК-1, ОПК-5
6. Обратная матрица. (см. [1], стр. 53)	УК-1, ОПК-5
7. Ранг матрицы. (см. [1], стр. 45)	УК-1, ОПК-5
8. Решение матричных уравнений. (см. [1], стр. 59)	УК-1, ОПК-5
9. Система линейных алгебраических уравнений. (см. [1], стр. 45)	УК-1, ОПК-5
10. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. (см. [1], стр. 47)	УК-1, ОПК-5
11. Теорема Кронекера-Капелли. (см. [1], стр. 45)	УК-1, ОПК-5
12. Метод обратной матрицы для решения определенных систем линейных алгебраических уравнений. (см. [1], стр. 59)	УК-1, ОПК-5
13. Формулы Крамера. (см. [1], стр. 66)	УК-1, ОПК-5

14. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. (см. [1], стр. 21)	УК-1, ОПК-5
15. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальные решения. (см. [1], стр. 46)	УК-1, ОПК-5
16. Двух, трехмерные и n -мерные векторы. (см. [1], стр. 3)	УК-1, ОПК-5
17. Операции над векторами. (см. [1], стр. 3-4)	УК-1, ОПК-5
18. Линейная зависимость векторов. (см. [1], стр. 32)	УК-1, ОПК-5
19. Линейное n -мерное пространство. (см. [1], стр. 42)	УК-1, ОПК-5
20. Базис и размерность n -мерного пространства. (см. [1], стр. 41)	УК-1, ОПК-5
21. Матрица перехода к новому базису. (см. [1], стр. 41)	УК-1, ОПК-5
22. Линейные операторы. Матрица линейного оператора. (см. [1], стр. 42)	УК-1, ОПК-5
23. Собственные значения и собственные векторы матрицы. (см. [1], стр. 77)	УК-1, ОПК-5
24. Уравнения прямой линии на плоскости. Полуплоскость. (см. [1], стр. 97)	УК-1, ОПК-5
25. Уравнение плоскости. Полупространство. (см. [1], стр. 106)	УК-1, ОПК-5
26. Уравнение прямой линии в пространстве. (см. [1], стр. 107)	УК-1, ОПК-5
27. Прямая и гиперплоскость в n -мерном точечном пространстве. (см. [1], стр. 106)	УК-1, ОПК-5
28. Полупространство в n -мерном точечном пространстве. (см. [1], стр. 107)	УК-1, ОПК-5
29. Эллипс, его свойства и каноническое уравнение. (см. [1], стр. 111)	УК-1, ОПК-5
30. Гипербола, ее свойства и каноническое уравнение. (см. [1], стр. 112)	УК-1, ОПК-5
31. Парабола, ее свойства и каноническое уравнение. (см. [1], стр. 113)	УК-1, ОПК-5

5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции УК-1

1. Вычислить сумму и произведение двух матриц: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Привести матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Решить систему уравнений, используя правило Крамера: $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}.$
7. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -x - y + 2z = -6 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}.$
8. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x - y + 4z = -1 \\ -x - 2y + 2z = 2 \end{cases}.$

5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-5

1. Найти \bar{x} , если $\bar{x} = 3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3$ и $\bar{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, -3, 4, 5)$, $\bar{a}_3 = (-5, 0, 2, 3)$.

2. Выясните, являются ли векторы линейно независимыми. Если векторы линейно зависимы, выразите один из векторов через остальные.

1) $\bar{a}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{a}_2 = (2, 0, -1)$;

2) $\bar{a}_1 = (1, -3, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, 3, -2)$;

3) $\bar{a}_1 = (0, 5, -7)$, $\bar{a}_2 = (0, 0, 0)$, $\bar{a}_3 = (1, 0, -2)$;

- 4) $\bar{a}_1=(1,-2,5), \bar{a}_2=(1,0,0), \bar{a}_3=(0,1,0), \bar{a}_4=(0,0,1)$;
3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Записать уравнения прямой, проходящей через точку $M(8; 9; 10)$ параллельно оси OZ .
5. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $A(-3;1)$ и $B(1;2)$.
6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$ параллельно прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}.$$

7. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, большая ось равна 16, а расстояние между директрисами 32.
8. Определить фокус и директрису параболы $y^2=12x$.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Bapat R.B. Linear Algebra and Linear Models (2012) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4471-2739-0>

Электронный курс «Линейная алгебра» (<https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=5276>)

б) дополнительная литература:

1. Belkacem Said-Houari Linear Algebra (2017) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-63793-8>
2. Fuad Aleskerov, Hasan Ersel Linear Algebra for Economists (2011) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-20570-5>
3. Lorenzo Robbiano Linear algebra for everyone (2011) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-88-470-1839-6>
4. Petersen Peter Linear Algebra (2012) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-3612-6>
5. Martin Kreuzer, Lorenzo Robbiano Computational Linear and Commutative Algebra (2016) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-43601-2>
6. Milan Vujčić, Jeffrey Sanderson Linear Algebra Thoroughly Explained (2008) <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-74639-3>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. MS Windows 7 (лицензия на ГОУ ВПО ННГУ им. Н.И. Лобачевского, идентификатор 47276400),
2. Microsoft Office 2007 Профессиональный + (лицензия на ГОУ ВПО ННГУ им. Н.И. Лобачевского, идентификатор 47729513),
3. Kaspersky Endpoint Security 10 for Windows (лицензия на ГОУ ВПО ННГУ им. Н.И. Лобачевского, №1096-160712-081443-850-73)

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также для самостоятельной работы студентов используются специальные помещения, укомплектованные специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие примерным программам дисциплин (модулей), рабочим учебным программам дисциплин (модулей).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению 38.03.01 «Экономика», профиль «Мировая экономика».

Автор

к.э.н., доцент кафедры экономической теории и методологии _____ / Ю.Н. Пыхтеев

Рецензент (ы) _____ Г.В.Погодина

Заведующий кафедрой «Экономической теории и методологии»

д.э.н., профессор _____ / А.В. Золотов

Программа одобрена на заседании методической комиссии Института экономики и предпринимательства протокол № 0 от 00.00.0000 .