

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО

решением Ученого совета ННГУ

протокол № 10 от 02.12.2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Вероятностные модели в естествознании

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки / специальность

01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы

Прикладная математика и информатика (общий профиль)

Форма обучения

очная

г. Нижний Новгород

2025 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.12.04 Вероятностные модели в естествознании относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1:</p> <p>Знать:</p> <p>понятие и основные свойства стохастического интеграла</p> <p>Ито;</p> <p>понятие о процессах Ито;</p> <p>понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе</p> <p>ПК-13.2:</p> <p>Знать:</p> <p>основные виды стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) (Ланжевена, Ито и Стратоновича); понятие и основные свойства стохастического интеграла</p> <p>Ито;</p> <p>понятие о процессах Ито;</p> <p>понятие о диффузионном процессе Ито и его производящем дифференциальном операторе</p> <p>ПК-13.3:</p> <p>Уметь:</p> <p>применять формулу Ито для аналитического решения простейших СДУ</p> <p>вычислять аналитически простейшие стохастические интегралы Ито; применять формулу Ито для</p>	Собеседование Задачи	Зачёт: Задачи

		<p>аналитического решения простейших СДУ</p> <p>ПК-13.4: Владеть: навыками решения простейших СДУ; методами численного моделирования СДУ; навыками применения современных программных средств для численного решения СДУ.</p>		
--	--	---	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	24
- КСР	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/ лабора торные работы), часы	Всего	
	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о	о ф о
Тема 1. Введение и предварительные сведения из теории вероятностей	18	6	6	12	6
Тема 2. Интеграл Ито	18	6	6	12	6
Тема 3. Процессы Ито и формула Ито	18	6	6	12	6

Тема 4. Стохастические дифференциальные уравнения и методы их решения	17	6	6	12	5
Аттестация	0				
КСР	1			1	
Итого	72	24	24	49	23

Содержание разделов и тем дисциплины

Тема 1. Стохастические аналоги обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи, приводящие к математическим моделям в виде СДУ (фильтрация, стохастическое управление, финансовая математика и др.). Вероятностное пространство. Случайные переменные. Независимость. Стохастический процесс. Теорема Колмогорова о построении стохастического процесса по конечномерным распределениям. Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова. Свойства винеровского процесса. Теорема непрерывности Колмогорова. Версии стохастических процессов. Существование непрерывной версии винеровского процесса.

Тема 2. Уравнение Ланжевена и его математическая интерпретация. Построение интеграла Ито. Свойство изометрии и другие свойства интеграла Ито. Мартингалы. Непрерывная версия стохастического интеграла. Интеграл Ито как мартингал. Обобщения интеграла Ито. Сравнение интегралов Ито и Стратоновича.

Тема 3. Определение процесса Ито. Формула Ито для скалярных процессов. Формула Ито для векторных процессов. Теорема о представлении мартингала.

Тема 4. Теорема существования и единственности решения СДУ Ито. Слабые и сильные решения СДУ. Некоторые приемы нахождения решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито. Численное моделирование винеровского процесса. Решение СДУ методами Эйлера и Рунге – Кутты. Слабые и сильные аппроксимации. Схемы Тейлора различных порядков. Схема Мильштейна. Численная устойчивость и точность методов.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

1. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 608 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113847.html>
2. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие.- 2-е изд., исправл. и дополн.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 496 с. - ISBN 5-9221-0254-0. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/ShaminConform2008ru.pdf>
3. Пухальский А.А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 512 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922106600.html>

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Собеседование) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Собеседование проходит в виде сдачи отчета по практическим работам. Отчет оформляется в электронном виде, где указывается цель работы, постановка задачи, ход выполнения работы, результат выполнения работы и выводы.

Темы практических работ, выполняемых на компьютерах:

1. Практическая работа «Моделирование процесса броуновского движения (винеровского процесса)»;
2. Практическая работа «Вычисление стохастических интегралов»;
3. Практическая работа «Моделирование процессов Ито»;
4. Практическая работа «Моделирование процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями».

Вопросы для собеседования:

1. Понятие стохастического процесса.
2. Построение процесса броуновского движения (винеровского процесса) на основе теоремы Колмогорова).
3. Существование непрерывной версии винеровского процесса.
4. Интеграл Ито и его свойства.
5. Формулы Ито для скалярных и векторных процессов
6. Теорема существования и единственности решения СДУ
7. Особенности численного решения СДУ

Критерии оценивания (оценочное средство - Собеседование)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Студент дал развернутый ответ на все вопросы без существенных ошибок.
не зачтено	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале.

5.1.2 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Задача 1. Найти $M[B_t^6]$ при условии $B_0 = 0$.

Задача 2. Найти решение уравнения Ито

$$dX_t = (c + \frac{1}{2}\alpha^2)X_t dt + \alpha X_t dB_t$$

3

Задача 3. Решить систему уравнений Ито

$$dX_1 = -\frac{1}{2}X_1 dt - \frac{a}{b}X_2 dB_t$$

$$dX_2 = -\frac{1}{2}X_2 dt + \frac{b}{a}X_1 dB_t$$

$$a, b > 0.$$

Задача 4. Является ли мартингалом процесс $X_t = B_t^3 - 3tB_t$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Выполнены все или большая часть этапов решения задачи или задача решена с незначительными недочетами. Результаты работы представлены преподавателю в срок.
не зачтено	Выполнены не все практические задания или выполнены не в полном объеме (представлено не полное описание этапов выполнения заданий, получен неверный ответ, результаты работы не представлены преподавателю).

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	отказа обучающегося от ответа		ошибок	несколько негрубых ошибок	несколько несущественных ошибок	нет.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Задачи) для оценки сформированности компетенции ПК-13

Задача 1. Пусть B_t – броуновское движение на R , $B_0 = 0$. Положим $E = E^0$.

С помощью разложения в степенной ряд экспонент из обеих частей сравните члены с одинаковыми степенями переменной u и докажите, что

$$E[B_t^4] = 3t^2$$

и что вообще

4

$$E[B_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} t^k, \quad k \in N.$$

Задача 2. Пусть B_t – броуновское движение. Зафиксируем $t_0 \geq 0$. Докажите, что процесс

$$\tilde{B}_t := B_{t+t_0} - B_{t_0}, \quad t \geq 0,$$

является броуновским движением.

Задача 3. Докажите непосредственно из определения Ито, что

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

Задача 4. Докажите непосредственно из определения Ито, что

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

Критерии оценивания (оценочное средство - Задачи)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Студент ответил на большую часть вопросов возможно с незначительными недочетами.
не зачтено	При ответе студент допускает грубые ошибки в основном материале и решении стандартных задач.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Федоткин Михаил Андреевич. Модели в теории вероятностей : учебник. - М. : Физматлит : ННГУ, 2012. - 608 с. - (Библиотека Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского). - ISBN 978-5-9221-1384-7 : 600.00., 200 экз.

Дополнительная литература:

1. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / Пугачев В. С. - 2-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 496 с. - Библиогр.: доступна в карточке книги, на сайте ЭБС Лань. - Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика. - ISBN 5-9221-0254-0., <https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=695911&idb=0>.

2. Пухальский Анатолий Анатольевич. Большие отклонения стохастических динамических систем : теория и приложения. - М. : Физматлит, 2005. - 512 с. - ISBN 5-9221-0660-0 : 61.00., 2 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. YALMIP Wiki <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>
2. Scilab <http://www.scilab.org/>
3. SeDuMi – <https://yalmip.github.io/allsolvers/>).

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами, специализированным оборудованием: - операционные системы семейства Microsoft Windows; - свободно распространяемое бесплатное программное обеспечение (пакет Scilab <http://www.scilab.org>, пакет YALMIP – <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>, решатель SeDuMi – <https://yalmip.github.io/allsolvers/>).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Пакшин Павел Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор.

Заведующий кафедрой: Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 02.12.2024, протокол № 5.