

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Физический факультет**

---

Утверждено

решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «31» мая 2023 г. № 6

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дифференциальные уравнения**

---

Уровень высшего образования  
**бакалавриат**

---

Направление подготовки / специальность  
**09.03.02 Информационные системы и технологии**

---

Направленность образовательной программы  
**Информационные системы и технологии в физических  
исследованиях**

---

Форма обучения  
**очная**

---

Год начала подготовки

2023 год

Нижний Новгород

2023 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» (Б1.О.05.04) относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана основной образовательной программы.

Дисциплина преподается в 3 семестре.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1. Знать основы высшей математики, общей физики, теории вероятности и технологий программирования	Знать основы дифференциального исчисления, основные методы решения дифференциальных уравнений	<i>Контрольные вопросы</i>
	ОПК-1.2. Уметь решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования	Уметь формулировать и решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания основных методов теории дифференциальных уравнений	<i>Практическая задача</i>
	ОПК-1.3. Иметь навыки теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	Владеть навыками решения дифференциальных уравнений в целях решения задач обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований	<i>Практическая задача</i>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

Очная форма обучения	
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	66
- занятия лекционного типа, ч	32
- практические занятия, ч	32
- лабораторных, ч	
самостоятельная работа, ч	42
Промежуточная аттестация	экзамен

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Частное решение. Общее решение. Общий интеграл. Поле направлений, изоклины. Типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными; однородные уравнения и сводящиеся к однородным; линейные уравнения; уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Признак полного дифференциала. Интегрирующий множитель. Особые точки и особые линии. Типы особых точек. Особые решения. Огибающая	30	8	10	-	18	12

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Занятия лабораторного типа	Всего	
однопараметрического семейства плоских кривых. Уравнение огибающей. Огибающая семейства интегральных кривых – особое решение уравнения. Изогональные и ортогональные траектории. Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции и разрешенных относительно аргумента. Уравнения Лагранжа и Клеро.						
2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальное уравнение семейства кривых. Уравнения, допускающие понижение порядка.	10	3	3	-	6	4
3. Линейные дифференциальные уравнения. Однородные и неоднородные уравнения. Линейный оператор $L(y)$ и его свойства. Линейные однородные уравнения: теоремы о сумме решений и о комплексных решениях. Линейно-зависимые и линейно-независимые функции. Определитель Вронского и его свойства. Теорема об общем решении уравнения порядка $n$ . Фундаментальная система решений.	8	3	2	-	5	3
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен. Решение уравнения в случае действительных и комплексных корней. Решение уравнения в случае кратных корней.	8	3	2	-	5	3
5. Линейные неоднородные уравнения. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. Метод Лагранжа вариации произвольных	12	3	4	-	7	5

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Занятия лабораторного типа	Всего	
<p>постоянных. Уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Типы решений. Теорема о форме частного решения, в случае, когда правая часть является суммой слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид.</p>						
<p><b>6. Уравнения Эйлера.</b> Однородные уравнения Эйлера, характеристическое уравнение и общее решение. Форма решений в случае комплексных корней и в случае кратных корней. Неоднородные уравнения Эйлера со специальной правой частью. Типы решений.</p>	7	2	2	-	4	3
<p><b>7. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.</b> Теорема существования и единственности решения. Поведение фазовых траекторий в случае автономных и неавтономных систем. Метод сведения системы <math>n</math> уравнений первого порядка к одному уравнению порядка <math>n</math>. Системы линейных дифференциальных уравнений – основные теоремы. Структура общего решения. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.</p>	10	3	3	-	6	4
<p><b>8. Теория устойчивости.</b> Определение устойчивости решения дифференциального уравнения по линейному приближению. Теорема Ляпунова. Теорема Четаева. Определение устойчивости решений с помощью матрицы Гурвица.</p>	10	3	3	-	6	4
<p><b>9. Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных.</b> Решение линейного однородного</p>	11	4	3	-	7	4

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Занятия лабораторного типа	Всего	
уравнения. Уравнения характеристик. Квазилинейные неоднородные уравнения. Неоднородные уравнения с двумя независимыми переменными.						
Текущий контроль успеваемости. Мониторинг текущей успеваемости студентов при самостоятельном решении задач на практических занятиях и при обсуждении домашних заданий (в течение всего семестра). Контрольные работы.	2				2	
Промежуточная аттестация. Экзамен	36					
Итого	144	32	32		66	42

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме - экзамен.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов включает активное изучение лекционного материала вместе с соответствующими разделами учебных пособий, а также разбор решённых примеров и выполнение домашних заданий в том числе с использованием систем компьютерной графики и компьютерных аналитических вычислений, позволяющих проводить визуализацию всех основных задач дисциплины и формировать у студентов компетенции работы с такими системами в интерактивном режиме.

**5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:**

## 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1 Контрольные вопросы

№	Вопросы	Код формируемой компетенции
1	Теорема существования и единственности решения.	ОПК-1
2	Поле направлений, изоклины.	ОПК-1
3	Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.	ОПК-1
4	Однородные уравнения.	ОПК-1
5	Уравнения, сводящиеся к однородным.	ОПК-1
6	Линейные уравнения.	ОПК-1
7	Уравнение Бернулли.	ОПК-1

№	Вопросы	Код формируемой компетенции
8	Признак полного дифференциала.	ОПК-1
9	Интегрирующий множитель.	ОПК-1
10	Особые точки и особые линии. Типы особых точек. Особые решения.	ОПК-1
11	Уравнение огибающей.	ОПК-1
12	Огибающая семейства интегральных кривых – особое решение уравнения.	ОПК-1
13	Изогональные и ортогональные траектории.	ОПК-1
14	Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции $y$ .	ОПК-1
15	Метод введения параметра для уравнений, разрешенных относительно $x$ .	ОПК-1
16	Уравнения Лагранжа и Клеро.	ОПК-1
17	Дифференциальное уравнение семейства кривых.	ОПК-1
18	Уравнения, допускающие понижение порядка.	ОПК-1
19	Линейный дифференциальный оператор $L(y)$ и его свойства.	ОПК-1
20	Линейные однородные уравнения: теорема о сумме решений.	ОПК-1
21	Линейные однородные уравнения: теорема о комплексных решениях.	ОПК-1
22	Определитель Вронского и его свойства.	ОПК-1
23	Теорема об общем решении уравнения порядка $n$ .	ОПК-1
24	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод решения.	ОПК-1
25	Характеристическое уравнение и характеристический многочлен.	ОПК-1
26	Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней.	ОПК-1
27	Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратных корней.	ОПК-1
28	Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения.	ОПК-1
29	Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.	ОПК-1
30	Уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Типы решений.	ОПК-1
31	Теорема о форме частного решения, в случае, когда правая часть является суммой слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид.	ОПК-1
32	Однородные уравнения Эйлера, характеристическое уравнение и общее решение.	ОПК-1
33	Форма решений уравнения Эйлера в случае комплексных корней и в случае кратных корней.	ОПК-1
34	Неоднородные уравнения Эйлера со специальной правой частью. Типы решений.	ОПК-1
35	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поведение фазовых траекторий в случае автономных и неавтономных систем.	ОПК-1
36	Метод сведения системы $n$ уравнений первого порядка к одному уравнению порядка $n$ .	ОПК-1
37	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.	ОПК-1
38	Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.	ОПК-1



№	Вопросы	Код формируемой компетенции
39	Сведение задачи об устойчивости произвольного решения системы уравнений к задаче об устойчивости нулевого решения. Исследование на устойчивость по линейному приближению.	ОПК-1
40	Определение устойчивости решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами с помощью матрицы Гурвица.	ОПК-1
41	Теорема Ляпунова. Теорема Четаева.	ОПК-1
42	Решение линейного однородного уравнения в частных производных. Уравнения характеристик.	ОПК-1
43	Линейные неоднородные уравнения в частных производных.	ОПК-1

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Тестовые задания не предусмотрены

### 5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

#### 1. Дифференциальные уравнения первого порядка:

$$1.1. (4y^2 + x^2)y' = xy$$

$$1.2. xy' + y = y^2 \ln x$$

$$1.3. x(y'^2 - 1) = 2y'$$

$$1.4. (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$$

$$1.5. xy^2 y' = x^2 + y^3$$

$$1.6. x - y' \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

$$1.7. xy' = y + x \left( 1 + e^{\frac{y}{x}} \right)$$

$$1.8. y' \cdot (x - \ln y') = 1$$

$$1.9. \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$$

$$1.10. (y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0$$

$$1.11. y'^2 - xy' - y = 0$$

$$1.12. \frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$$

#### 2. Дифференциальное уравнение семейства кривых, огибающая семейства кривых, ортогональные и изогональные траектории:

2.1. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий:  $y = (x + C)^2$

2.2. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий:  $y^2 = 2px$

2.3. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:  $y = \operatorname{tg}^2(x + C)$

2.4. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:  $y = e^{-(x+C)^2}$

2.5.Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:

$$(x - C^2)^2 + y^2 = C^2$$

2.6.Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:

$$y = (x + C)^2 e^{-x^2}$$

2.7.Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение ортогональных траекторий:  $x^2 + C = 2Cy$

2.8.Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:

$$y = C^2 x^2 + C$$

2.9.Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:

$$y = x \sin(Cx)$$

2.10. Найти дифференциальное уравнение семейства и уравнение огибающей:  $y = Cx^2 + C^2 + C$

### 3. Дифференциальные уравнения высших порядков:

3.1.  $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$

3.2.  $x^4((y')^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$

3.3.  $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$

3.4.  $y^4 - y^3y'' = 1$

3.5.  $y'' - 2y' + y = xe^x(\sin ix)^2$

3.6.  $x^2y'' - xy' + y = \frac{x}{\ln x} + \frac{\ln x}{x}$

3.7. Написать вид общего решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 6y' + 13y = 3xe^x \sin 2x + e^3(x^4 - 8)$$

3.8.  $\frac{y^2}{x^2} + (y')^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$

3.9.  $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$

3.10.  $y'''(y')^2 = (y'')^3$

3.11.  $y'' + 2y' + y = \cos ix$

3.12.  $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$

### 4. Теория устойчивости:

4.1.проверить на устойчивость положение равновесия (1, 2) системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

4.2.проверить на устойчивость нулевое решение системы: 
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x) \\ \dot{y} = 2e^y - 2\cos(\pi/3 - x) \end{cases}$$

4.3.проверить на устойчивость нулевое решение уравнения:  
$$y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$$

### 5. Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных:

$$5.1. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$5.2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$5.3. xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

$$5.4. y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

$$5.5. yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z$$

$$5.6. \text{Решить уравнение } (1+x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \ln y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ при условии, что } z = y \text{ при}$$

$$x = 0$$

$$5.7. (1+x^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \ln y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + 1$$

$$5.8. y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (z+1)^2 y$$

$$5.9. \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x+1}$$

$$5.10. \text{Решить уравнение } (1+x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y(\ln y + 1) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ при условии, что}$$

$$z = \ln y \text{ при } x = \ln y - 1.$$

#### 5.2.4. Темы курсовых работ, эссе, рефератов

Курсовые работы, эссе, рефераты не предусмотрены

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

- 1) Эльсгольц Л. Э. - Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учеб. для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов. - М.: Эдиториал УРСС, 2002. - 320 с., 50 экз.
- 2) Пискунов Н. С. - Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник для втузов : [в 2 т.]. Т. 2. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 544 с., 35 экз.
- 3) Понтрягин Л. С. - Обыкновенные дифференциальные уравнения: [учеб. для гос. ун-тов]. - М.: Наука, 1970. - 331 с., 30 экз.
- 4) Филиппов А. Ф. - Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: ЛИБРОКОМ, 2009. - 240 с., 40 экз.

### б) дополнительная литература:

- 1) Степанов В. В. - Курс дифференциальных уравнений: учебник. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. - 468 с., 3 экз.; М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. - 468 с., 8 экз.; М.: Гостехиздат, 1953. - 468 с., 1 экз.; Л.: Гостехиздат, 1945. - 406 с., 3 экз.; Л.: Гостехиздат., 1950. - 468 с., 1 экз.; М.: URSS : Изд-во ЛКИ, 2008. - 472 с., 1 экз.
- 2) Арнольд В. И. - Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студентов мех.-мат. специальностей вузов. - М.: Наука, 1971. - 304 с., 25 экз.

### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

- 1) Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: учеб. / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2002. — 256 с. <https://e.lanbook.com/book/48171>
- 2) Подборка литературы по тематике дисциплины в электронной физико-математической библиотеке открытого доступа EqWorld <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
- 3) Пакеты компьютерных аналитических вычислений для персонального компьютера. Допускается применение сред Wolfram Mathematica, Matlab, MathCAD, Maple или любых иных компьютерных ресурсов аналогичного назначения

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: меловая доска, мультимедийный проектор, экран.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ с учетом рекомендаций и ОПОП ВПО по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Автор (ы):

К.ф.-м.н., доцент, декан физического  
факультета

\_\_\_\_\_/Малышев А.И./

Рецензент

д.ф.-м.н., профессор, зав. каф.  
статистической радиофизики и  
мобильных систем связи РФФ

\_\_\_\_\_/Мальцев А.А.

Заведующий кафедрой ИТФИ  
д.т.н., профессор

\_\_\_\_\_/Фидельман В.Р

Программа одобрена на заседании методической комиссии физического факультета