

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол № 15 от 24.12.2025 г.

Рабочая программа дисциплины

Качественные методы исследования динамических систем

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Математическое моделирование и искусственный интеллект

Форма обучения
очная

г. Нижний Новгород

2026 год начала подготовки

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.В.ДВ.12.06 Качественные методы исследования динамических систем относится к части, формируемой участниками образовательных отношений образовательной программы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства	
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	Для текущего контроля успеваемости	Для промежуточной аттестации
ПК-13: Способен участвовать в исследовании математических моделей в естественных науках и технике	<p>ПК-13.1: Знает методы создания, анализа и исследования математических моделей в естественных науках и технике</p> <p>ПК-13.2: Знает математические методы обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p> <p>ПК-13.3: Умеет корректно использовать методы создания, анализа и исследования математических моделей, умеет применять численные и аналитические методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности</p> <p>ПК-13.4: Владеет навыками использования математических методов обработки информации, полученной в результате экспериментальных исследований</p>	<p>ПК-13.1: Знать - методы и приемы качественного исследования автономных и неавтономных динамических систем второго порядка; - качественно-численные методы построения параметрических и фазовых портретов динамических систем второго порядка.</p> <p>ПК-13.2: Знать - схемы бифуркаций состояний равновесия и периодических движений динамических систем второго порядка.</p> <p>ПК-13.3: Уметь - строить параметрические и фазовые портреты автономных и неавтономных динамических систем второго порядка; - устанавливать бифуркации, приводящие к возникновению и смене характера.</p> <p>ПК-13.4: Владеть опытом качественно – численного исследования</p>	Контрольная работа	Зачёт: Контрольные вопросы

		конкретных динамических систем второго порядка и интерпретации полученных результатов.		
--	--	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1 Трудоемкость дисциплины

	очная
Общая трудоемкость, з.е.	2
Часов по учебному плану	72
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	
- занятия лекционного типа	24
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	24
- КСР	1
самостоятельная работа	23
Промежуточная аттестация	0 Зачёт

3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе			
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них			Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практические занятия/лабораторные работы), часы	Всего	
0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	0 Ф 0	
1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования	12	4	4	8	4
2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка	12	4	4	8	4
3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка	12	4	4	8	4
4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями	17	6	6	12	5
5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений	18	6	6	12	6
Аттестация	0				
КСР	1			1	

Итого	72	24	24	49	23
-------	----	----	----	----	----

Содержание разделов и тем дисциплины

1. Математическая модель динамической системы и задача ее исследования: Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические систем. Фазовое пространство. Фазовые траектории. Математическая модель динамической системы. Примеры динамических систем. Задача исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портреты. Бифуркация.
2. Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка: Простые состояния равновесия. Фазовая плоскость линейной системы. Поведение фазовых траекторий нелинейной системы в окрестности состояния равновесия в случае действительных, комплексных, кратных корней характеристического уравнения. Состояние равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями. Сложные состояния равновесия. Бифуркации состояний равновесия. Области притяжения устойчивых состояний равновесия.
3. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка: Численный метод отыскания состояний равновесия и определения их типа. Численный метод построения сепаратрис седловых состояний равновесия. Численный метод построения фазовой траектории, выходящей из произвольной точки фазовой плоскости.
4. Неавтономные динамические системы второго порядка с периодическими правыми частями: Сведение исследования структуры фазового пространства к точечному отображению плоскости в плоскость. Системы с цилиндрическим фазовым пространством. Типы периодических движений. Мультипликаторы. Бифуркации. Поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивых, неустойчивых и седловых периодических движений. Области притяжения устойчивых периодических движений. Периодические движения колебательного и вращательного типов.
5. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений: Численные методы отыскания и исследования устойчивости периодических решений неавтономных динамических систем второго порядка. Численный метод построения сепаратрисных инвариантных кривых точечного отображения плоскости в плоскость.

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся включает в себя подготовку к контрольным вопросам и заданиям для текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведенным в п. 5.

Виды самостоятельной работы студентов:

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка к выполнению письменной контрольной работы;
- подготовка к промежуточной аттестации.

Проработка теоретического материала лекционных занятий

Выполняется самостоятельно обучающимся с использованием материалов лекций и рекомендованной основной и дополнительной литературы. Контроль выполняется на практических занятиях.

Подготовка к выполнению письменной контрольной работы

Аудиторная контрольная работа проводится по материалам темы «Состояния равновесия автономных динамических систем второго порядка».

Для подготовки к контрольной работе рекомендуется повторно просмотреть материалы соответствующих лекций и практических занятий.

Разбор контрольной работы и исправление ошибок проводится в часы контроля самостоятельной работы студентов.

Подготовка к промежуточной аттестации

Фактором успешного прохождения промежуточной аттестации является систематическая работа студента в течение всего периода изучения дисциплины. В этом случае подготовка к зачету будет концентрированной систематизацией всех полученных знаний, умений и навыков.

В качестве методических материалов при подготовке к зачету рекомендуется использовать собственные конспекты лекций и рекомендованную основную и дополнительную литературу.

Допуском к зачету является выполнение письменной контрольной работы и презентаций результатов двух практических заданий.

5. Фонд оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

5.1 Типовые задания, необходимые для оценки результатов обучения при проведении текущего контроля успеваемости с указанием критериев их оценивания:

5.1.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольная работа) для оценки сформированности компетенции ПК-13:

Дана автономная система.

Задание 1.

Аналитически найти состояния равновесия и исследовать их тип и характер устойчивости.

Задание 2.

На плоскости параметров построить бифуркационные диаграммы состояний равновесия, содержащие области их существования и устойчивости.

Задание 3.

Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей.

Задание 4.

Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

Дана автономная система. Качественно – численными методами найти состояния равновесия и исследовать их тип и характер устойчивости. На плоскости параметров построить бифуркационные диаграммы состояний равновесия, содержащие области их существования и устойчивости. Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей. Для каждой области построить фазовый портрет и выделить области притяжения устойчивых состояний равновесия.

Дана неавтономная система

Качественно – численными методами исследовать периодические колебательные движения:

- Найти соответствующие им неподвижные точки точечного отображения T , порождаемого фазовыми траекториями, исследовать их тип и характер устойчивости.
- На плоскости параметров при фиксированных значениях параметров построить бифуркационные диаграммы периодических колебаний, содержащие области их существования и устойчивости.
- Выяснить бифуркации, происходящие на границах этих областей.
- Для каждой области построить фазовый портрет отображения T .

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольная работа)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Задание выполнено полностью, выполнена основная часть задания или задание выполнено с недочетами
не зачтено	Задание не выполнено или выполнено с грубыми ошибками

5.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине при промежуточной аттестации

Шкала оценивания сформированности компетенций

Уровень сформированности компетенций (индикатор достижения компетенций)	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено			зачтено			
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Ошибок нет.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с отдельным	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном

			все задания, но не в полном объеме	Выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	в полном объеме, но некоторые с недочетами	и несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие базовых навыков. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторым и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценивания при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне выше предусмотренного программой
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично».
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо».
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно».
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения на промежуточной аттестации с указанием критериев их оценивания:

5.3.1 Типовые задания (оценочное средство - Контрольные вопросы) для оценки сформированности компетенции ПК-13

1. Понятие динамической системы. Автономные и неавтономные динамические системы. Фазовое пространство.

Математическая модель динамической системы.

2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Задача качественного исследования динамической системы. Параметрический и фазовый портрет. Бифуркация.
4. Состояния равновесия автономной динамической системы второго порядка. Простое и сложное состояние равновесия.
5. Типы простых состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.
6. Устойчивость траекторий динамических систем. Непрерывная зависимость от начальных условий и параметров.
7. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными различными характеристическими корнями одного знака.
8. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными характеристическими корнями разных знаков.
9. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с действительными равными характеристическими корнями.
10. Поведение фазовых траекторий автономной динамической системы в окрестности простого состояния равновесия с комплексными характеристическими корнями, имеющими не равную нулю действительную часть.
11. Состояние равновесия автономной динамической системы второго порядка с чисто мнимыми характеристическими корнями.
12. Типы сложных состояний равновесия автономной динамической системы.
13. Исследование сложного состояния равновесия с ненулевой седовой величиной.
14. Исследование сложного состояния равновесия с нулевой седовой величиной.
15. Бифуркации состояний равновесия автономной динамической системы второго порядка.
16. Качественно-численное построение фазового портрета автономной динамической системы второго порядка.
17. Неавтономные динамические системы 2-го порядка с периодическими правыми частями. Метод точечных отображений.
18. Периодические решения неавтономных систем второго порядка с периодическими правыми частями. Мультипликаторы.
19. Бифуркации периодических решений неавтономных систем второго порядка с периодическими правыми частями.
20. Качественно-численное исследование неавтономных динамических систем второго порядка на основе метода точечных отображений.

Критерии оценивания (оценочное средство - Контрольные вопросы)

Оценка	Критерии оценивания
зачтено	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Баутин Николай Николаевич. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. - 2-е изд., доп. - М. : Наука, 1990. - 486, [2] с. : ил. - (Справочная математическая библиотека : СМБ). - ISBN 5-02-014321-9 : 3.20., 15 экз.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М. : Наука, 1967. - 487 с. : черт. - 2.58., 53 экз.
3. Методы качественной теории в нелинейной динамике = Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Ч. 1 / пер. с англ. С. С. Пашкиной [и др.]. - М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. - 416 с. - (Современная математика). - ISBN 5-93972-305-5 : 47.00., 2 экз.
4. Бутенин Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний : [учеб. пособие для вузов]. - М. : Наука, 1987. - 382 с. - 1.00., 50 экз.

Дополнительная литература:

1. Белых Владимир Николаевич. Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем : учеб. пособие / Горьк. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. - Горький : [б. и.], 1980. - 98 с. - 0.22., 3 экз.
2. Некоркин Владимир Исаакович. Лекции по основам теории колебаний : учеб. пособие для студентов ННГУ, специализирующихся в области радиофизики, приклад. математики и мат. моделирования / ННГУ. - Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2012. - 311 с. - ISBN 978-5-91326-230-1 : 162.13., 148 экз.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины):

1. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.

Электронный ресурс: https://www.j-ets.net/ETS/russian/depositary/v21_i1/pdf/14.pdf

2. Киселева Н.В. Электронный образовательный ресурс по качественно-численным методам исследования неавтономных динамических систем // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 281-292.

<http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/364/301>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных образовательной программой, оснащены мультимедийным оборудованием (проектор, экран), техническими средствами обучения, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки/специальности 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Автор(ы): Барабаш Никита Валентинович, кандидат физико-математических наук.

Рецензент(ы): Ломакина Любовь Сергеевна.

Заведующий кафедрой: Осипов Григорий Владимирович, доктор физико-математических наук.

Программа одобрена на заседании методической комиссии от 17.12.2025, протокол № №6.