

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
от 14.12.2021 г. протокол № 4

**Рабочая программа дисциплины**

**Численные методы  
математического программирования**

*(наименование дисциплины (модуля))*

Уровень высшего образования

специалитет

*(бакалавриат / магистратура / специалитет)*

Направление подготовки / специальность

**010501 Фундаментальная математика и механика**

*(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)*

Направленность образовательной программы

**Фундаментальная механика и приложения**

*(указывается профиль / магистерская программа / специализация)*

Форма обучения

очная

*(очная / очно-заочная / заочная)*

Нижегород

2022 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений .

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.07.02 «Численные методы математического программирования» относится к части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-12. Владение навыками применения математически сложных алгоритмов в современных специализированных программных комплексах, реализации в них собственных методов, моделей и алгоритмов	ПК-12.1. Знает теоретические основы фундаментальных компьютерных наук.	<i>Знать классические постановки задач математического программирования, основные численные методы математического программирования, а также аналитические методы решения задач математического программирования на основе необходимых и достаточных условий оптимальности и соответствующие средства программирования на языке MATLAB</i>	Задачи (домашние задания), контрольные работы, вопросы и задания к коллоквиуму и экзамену
	ПК-12.2. Умеет ориентироваться в современных алгоритмах компьютерной математики.	<i>Умеет самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач в виде задач математического программирования, допускающих такую формализацию, а также применять для их решения численные методы математического программирования и аналитические методы решения задач математического программирования на основе необходимых и достаточных условий оптимальности и средствами программирования в системе MATLAB</i>	
	ПК-12.3. Имеет практический опыт использования математически сложных алгоритмов в современных программных комплексах, включая реализацию в них собственных методов и мо-	<i>Имеет практический опыт использования методов формализации прикладных и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей научно-исследовательской деятельности, в виде задач математического программирования, при условии, что они допускают такую формализацию, а также применения для их решения численных методов математического программирования и аналитических</i>	

	делей	методов решения задач математического программирования на основе необходимых и достаточных условий оптимальности и с помощью программирования на языке MATLAB	
--	-------	---	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>5 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>98</b>
- занятия лекционного типа	32
- занятия лабораторного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	2
<b>самостоятельная работа</b>	<b>46</b>
<b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Восьмой семестр						
Тема 1 Постановки прикладных задач и их формализация. Классификация задач математического программирования. Терминология.	5	1	1	1	3	2
Тема 2 Классификация численных методов оптимизации	5	1	1	1	3	2
Тема 3 Основы выпуклого анализа	5	1	1	1	3	2
Тема 4 Общая задача минимизации	5	1	1	1	3	2

ции						
Тема 5 Задание целевой функции как подпрограммы в системе MATLAB и особенности ее вызова для случаев, когда требуется или не требуется градиент, гессиан. Построение линий уровня и сеточного графика функции двух переменных в системе MATLAB	5	1	1	1	3	2
Тема 6 Метод наискорейшего спуска. Овражный эффект. Визуализация работы метода в системе MATLAB	5	1	1	1	3	2
Тема 7 Метод тяжелого шарика. Методы сопряженных направлений и сопряженных градиентов для квадратичных функций и в общем случае. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса	5	1	1	1	3	2
Тема 8 Методы Ньютона и Ньютона-Рафсона	5	1	1	1	3	2
Тема 9 Квазиньютоновские методы: DFP, Бroyдена, BFGS, BFGS	5	1	1	1	3	2
Тема 10 Методы доверительной области	5	1	1	1	3	2
Тема 11 Методы прямого поиска (симплексный метод Нелдера-Мида и метод конфигураций Хука-Дживса)	8	2	2	2	6	2
Тема 12 Методы решения нелинейной задачи наименьших квадратов (методы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта)	8	2	2	2	6	2
Тема 13 Симплекс-метод для решения задач линейного программирования	8	2	2	2	6	2
Тема 14 Простейшие методы не-	8	2	2	2	6	2

линейной условной оптимизации (метод проекции градиента, метод условного градиента)						
Тема 15 Метод квадратичного штрафа	8	2	2	2	6	2
Тема 16 Метод модифицированной функции Лагранжа	8	2	2	2	6	2
Тема 17 Простейшая задача квадратического программирования	8	2	2	2	6	2
Тема 18 Двойственный метод решения простейшей задачи квадратического программирования с линейными ограничениями	8	2	2	2	6	2
Тема 19 Локальный SQP-метод	9	2	2	2	6	3
Тема 20 Глобальный SQP-метод	9	2	2	2	6	3
Тема 21 Обобщенный метод приведенного градиента	9	2	2	2	6	3
<b>Текущий контроль (КСР)</b>	3				3	
<b>Промежуточная аттестация - экзамен</b>	36					
<b>Итого</b>	180	32	32	32	99	45

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Методы оптимизации» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к экзамену. Самостоятельная работа студентов (выполнение домашних практических заданий, подготовка к коллоквиуму, экзамену) обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами (см. ниже раздел)

#### 5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

Для подготовки к экзамену студентам можно воспользоваться:

1. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
2. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
3. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет,

2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

4. Сумин В.И. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". - Горький: Изд-во ГГУ, 1989 (40).
5. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).
6. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
7. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
8. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

Указанные пособия содержат теоретический материал с иллюстрирующими подробными примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения, а также примеры программ на языке MATLAB и задания для выполнения лабораторных работ.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

### Темы лабораторных работ:

1. Построение сеточного графика и линий уровня функции двух переменных.
2. Метод наискорейшего спуска.
3. Метод Ньютона-Рафсона.
4. Методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса.
5. Методы DFP и BFGS.
6. Простейший метод доверительной области.
7. Метод Нелдера-Мида.
8. Метод конфигураций Хука-Дживса.
9. Метод Гаусса-Ньютона.
10. Симплекс-метод.
11. Метод проекции градиента.
12. Метод условного градиента.
13. Метод квадратичного штрафа.
14. Метод модифицированной функции Лагранжа.
15. SQP-метод.
16. Обобщенный метод приведенного градиента.

**Примечание.** Каждый студент получает индивидуальные задания по каждой из приведенных выше тем, самостоятельно пишет программу, реализующую соответствующий метод в системе MATLAB, и минимизирует с его помощью конкретную функцию из индивидуального задания, после чего пишет письменный отчет и защищает его на семинарском занятии.

### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

#### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				

компетенций)							
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.				Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки.		
	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень

		хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не за- чтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача безусловной конечномерной минимизации.	ПК-12
2. Привести примеры прикладных задач, формализуемых как задача условной конечномерной минимизации.	ПК-12
3. Привести классификацию численных методов оптимизации.	ПК-12
4. Описать синтаксис основных команд системы MATLAB, используемых для построения линий уровня и сеточного графика функции двух переменных.	ПК-12
5. Описать технологию визуализации работы численных методов безусловной двумерной оптимизации в системе MATLAB.	ПК-12
6. Описать технологию визуализации допустимого множества задачи условной двумерной оптимизации в системе MATLAB.	ПК-12
7. Понятие выпуклого множества. Свойства выпуклых множеств.	ПК-12
8. Понятие проекции точки на множество. Критерий проекции на выпуклое множество.	ПК-12
9. Понятие выпуклой функции. Свойства выпуклых функций.	ПК-12
10. Критерий выпуклости в классе дифференцируемых функций.	ПК-12



11. Понятие положительной и неотрицательной определенности матрицы. Критерий Сильвестра.	ПК-12
12. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций.	ПК-12
13. Точки минимума выпуклых функций и их свойства.	ПК-12
14. Критерий оптимальности в классе выпуклых дифференцируемых функций.	ПК-12
15. Понятие возможного направления. Понятие направления спуска. Необходимое условие оптимальности общего вида в общей задаче минимизации.	ПК-12
16. Необходимое и достаточное условия направления спуска.	ПК-12
17. Необходимое условие оптимальности первого порядка в общей задаче минимизации.	ПК-12
18. Градиентные методы (в частности, простейший с фиксированным шагом, и метод наискорейшего спуска). Овражный эффект (объяснение с помощью геометрической иллюстрации).	ПК-12
19. Три теоремы о сходимости градиентных методов (одна – с док-вом).	ПК-12
20. Минимизация квадратичных функций: методы сопряженных направлений (с выводом итерационной формулы на основе леммы о линейной независимости сопряженных направлений).	ПК-12
21. Минимизация квадратичных функций: метод сопряженных градиентов как метод сопряженных направлений.	ПК-12
22. Метод сопряженных градиентов для случая неквадратичной функции (методы Полака-Рибьера и Флетчера-Ривса).	ПК-12
23. Метод тяжелого шарика.	ПК-12
24. Методы Ньютона (идея метода; алгоритм; теорема о сходимости; достоинства и недостатки) и Ньютона-Рафсона	ПК-12
25. Понятие о квазиньютоновских методах.	ПК-12
26. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: каноническая задача ЛП. Приведение задач ЛП к каноническому виду.	ПК-12
27. Итерационный алгоритм симплекс-метода в невырожденном случае. Итерационные формулы. Симплекс-таблица (СТ). Анализ и пересчет СТ.	ПК-12
28. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: отыскание начальной вершины методом искусственного базиса.	ПК-12

29. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: понятие вырожденной вершины. Заикливание и антициклин.	ПК-12
30. Метод проекции градиента.	ПК-12
31. Метод условного градиента.	ПК-12
32. Метод квадратичного штрафа.	ПК-12
33. Метод модифицированной функции Лагранжа.	ПК-12
34. Простейшая задача квадратического программирования.	ПК-12
35. Двойственный метод решения простейшей задачи квадратического программирования с линейными ограничениями.	ПК-12
36. Локальный SQP-метод.	ПК-12
37. Глобальный SQP-метод.	ПК-12
38. Обобщенный метод приведенного градиента (GRG-метод)	ПК-12

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции

Вариант 1

Задача 1. Проверить на выпуклость функцию  $f(x) = (x_1)^2 - x_1 x_2 + (x_2)^2$  на множестве  $X = R^2$ .

Задача 2. Существует ли точка глобального минимума в задаче оптимизации:  $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ ? Почему?

Задача 3. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:  $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Задача 4. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2x - y + 3z \rightarrow \min \\ x + 3y - 2z \leq 2, & 2x - y + z = 4, \\ y, z \geq 0. \end{cases}$$

Задача 5. Решить задачу  $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$  методом Ньютона, начав с точки (1,1).

### 5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

#### Вариант 1 (Выпуклый анализ)

Задание 1. Проверить на выпуклость множество  $X = \Gamma_{c, \alpha}$ .

Задание 2. Проверить на выпуклость функцию  $f(x) = 3(x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2$ .

#### Вариант 2 (Общая задача оптимизации)

Задание 1. Для задачи  $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min, (x^1)^2 + x^2 \leq 1, x^2 \geq 0$ , построить допустимое множество и линии уровня целевой функции; указать точку глобального минимума (если она существует). Выполняются ли какие-то достаточные условия существования глобального минимума в этой задаче?

Задание 2. Решить задачу безусловной минимизации:  $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$ ,  
 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Вариант 3 (Гладкие задачи математического программирования)

Задание 1. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:  
 $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min, (x^1)^2 + x^2 \leq 1, x^2 \geq 0$ .

Задание 2. Решить с помощью теоремы Куна-Таккера в дифференциальной форме задачу оптимизации:  
 $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x^1 + x^2 = 1, x^1, x^2 \geq 0$ .

### Вариант 4 (Выпуклое и линейное программирование)

Задание 1. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:  

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2y - x + 3z \rightarrow \min \\ 3x + y - 2z \leq 2, & 2y - x + z = 4, \\ x, z \geq 0. \end{cases}$$

Задание 2. Решить ту же задачу с помощью теоремы Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке.

### Вариант 5 (Численные методы оптимизации)

Задание 1. Решить задачу  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \rightarrow \min$  методом Ньютона, начав с точки  $(1, -1)$ .

Задание 2. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования:  $f(x) = (c, x) \rightarrow \min$ ,  
 $Ax = b, x \geq 0, A = \begin{pmatrix} 2, 1, 1, 0 \\ 1, 3, 0, 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c = (1, -2, 2, 3)$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988 (215).
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука. 1984 (160).

### б) дополнительная литература:

3. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986 (4).
4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983 (14).

### в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре прикладной математики для выдачи студентам

5. Сумин В.И. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". - Горький: Изд-во ГГУ, 1989 (40).

6. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
7. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
8. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

**г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

Фонд электронных изданий ННГУ. Режим доступа:  
<http://www.unn.ru/books/resources.html>

9. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
10. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
11. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

**7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. \_\_\_\_\_ А.В.Чернов

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ М.В. Иванченко

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики  
от 01.12.2021 года, протокол № 2.