

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
«31» мая 2023 г. № 6

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования
Бакалавриат
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность
03.03.03 Радиофизика
(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы
Радиофизика и электроника
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения
Очная
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород

2023 год

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Базовая. Блок 1.	Дисциплина <i>Б1.О.14 Линейная алгебра</i> относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» ООП по направлению подготовки 03.03.03 "Радиофизика" с профилем «Радиофизика и электроника». Дисциплина обязательна для освоения во 2 семестре.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физики и радиофизики и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями в области физики и радиофизики.	Знает основные понятия линейной алгебры. Умеет применять основной аппарат линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности. Имеет опыт практического применения основного аппарата линейной алгебры для решения задач по физике и радиофизике.	Теоретический вопрос на экзамене
	ОПК-1.2. Анализирует физические аспекты теории и возможности ее использования для решения научно-исследовательских задач.	Знает методы доказательства основных теорем линейной алгебры. Умеет применять основной аппарат линейной алгебры к анализу физических аспектов теории при решении научно-исследовательских задач. Владеет опытом анализа физических аспектов линейной алгебры и возможностей ее использования для решения научно-исследовательских задач.	Теоретический вопрос на экзамене

	ОПК-1.3. Решает научно-исследовательские задачи, в том числе в сфере педагогической деятельности.	<p>Знает методы решения ключевых задач линейной алгебры.</p> <p>Умеет решать практические задачи в области физики и радиофизики с помощью прикладных аспектов линейной алгебры.</p> <p>Владеет навыками применения аппарата линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности.</p>	Контрольная работа, практическое задание на экзамене
--	---	---	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	66
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСРИФ)	2
самостоятельная работа	40
Промежуточная аттестация – экзамен.	54

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Консультации	Всего	
	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная	Очная
1. Матрицы и определители.		6	4	0	10	6
2. Системы линейных уравнений.		6	4	0	10	6
3. Линейные пространства.		7	2	0	9	6
4. Линейные операторы.		7	2	0	9	6
5. Квадратичные формы.		6	3	0	9	6
Промежуточная аттестация (контрольная работа)		0	1	0	1	2
Итоговая аттестация (экзамен)		0	0	2	2	8
Итого	144	32	16	2	50	40

Практические занятия организуются, в том числе, в форме практической подготовки. На практических занятиях более подробно изучается программный материал в плоскости отработки практических умений и навыков и усвоения следующих тем:

Раздел 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

Прямоугольные матрицы. Сумма матриц, произведение матрицы на число, умножение матриц. Свойства этих операций. Перестановки, инверсии, транспозиции. Определитель квадратной матрицы, свойства определителя. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц. Обратная матрица, критерий обратимости, вычисление обратной матрицы.

Раздел 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Элементарные преобразования строк матрицы и их применение к вычислению ранга матрицы. Системы линейных уравнений. Основные определения: частное и общее решения, совместные и несовместные системы, эквивалентность систем. Теорема Крамера. Критерий совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли). Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Линейные однородные системы (ЛОС). Свойства решений. Фундаментальная система решений (ФСР). Теорема о ФСР. Структура общего решения ЛОС. Неоднородные системы (ЛНС). Структура общего решения ЛНС.

Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Аксиоматика линейного векторного пространства (ЛВП), примеры, свойства ЛВП. Линейная зависимость системы векторов в ЛВП. Базис и размерность ЛВП. Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Линейные оболочки и теоремы о размерности. Изоморфизм ЛВП. Евклидово пространство, определение и примеры. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом пространстве. Ортогональность и ортонормированность системы векторов. Процесс ортогонализации системы векторов.

Раздел 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Определение линейного оператора. Примеры. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора в данном базисе. Преобразование матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому. Действия с линейными операторами. Обратный оператор, его свойства. Критерий обратимости. Подпространства, инвариантные относительно оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства. Характеристическое уравнение. Унитарный и самосопряженный операторы. Свойства собственных значений и векторов самосопряженного оператора. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора, нахождение его.

Раздел 5. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

Линейная, билинейная и квадратичная формы в ЛВП. Матрица квадратичной формы (КФ) и ее преобразование при переходе к новому базису. Ранг и индекс КФ. Теорема Лагранжа о приведении КФ к диагональному виду. Теорема Якоби. Закон инерции КФ. Критерий Сильвестра положительной определенности КФ.

Темы практических занятий.

1. Определители
2. Действия с матрицами. Обратная матрица
3. Ранг матрицы. Линейные однородные системы.
4. Линейные неоднородные системы. Линейные системы с параметрами.
5. Линейные подпространства. Собственные числа и вектора.
6. Контрольная работа по теме “Определители. Системы линейных уравнений. Собственные числа и вектора”. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом ортогонального преобразования.
7. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методами Лагранжа и Якоби.
8. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие знаний, умений и навыков применения аппарата линейной алгебры для решения задач профессиональной деятельности.

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме проведения контрольной работы и проверки выполнения домашних заданий.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Линейная алгебра» включает выполнение практических заданий под контролем преподавателя, а также подготовку к контрольной работе и экзамену.

Контрольные вопросы и практические задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовл етворит ельно	удовлет ворител ьно	Хорошо	очень хорошо	отлично	превосх одно

<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов

<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы творческий подход к решению нестандартных задач.
---------------	--	--	--	---	---	---	---

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Уровень подготовки	
Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Вопросы по теории к экзамену по дисциплине «Линейная алгебра» для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Вопрос	Код компетенции
1. Перестановки, инверсии, транспозиции, подстановки.	ОПК-1
2. Прямоугольные матрицы. Сумма матриц, произведение матрицы на число, умножение матриц. Свойства этих операций.	ОПК-1
3. Определитель квадратной матрицы и его свойства. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Теорема Лапласа. Определитель произведения матриц.	ОПК-1
4. Обратная матрица, критерий обратимости, вычисление обратной матрицы.	ОПК-1
5. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Элементарные преобразования строк матрицы и их применение к вычислению ранга матрицы.	ОПК-1
6. Системы линейных уравнений. Основные определения: частное и общее решения, совместные и несовместные системы, эквивалентность систем.	ОПК-1
7. Теорема Крамера. Критерий совместности систем линейных уравнений (теорема Кронекера - Капелли). Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.	ОПК-1
8. Линейные однородные системы (ЛОС). Свойства решений. Фундаментальная система решений (ФСР). Теорема о ФСР. Структура общего решения ЛОС.	ОПК-1
9. Неоднородные системы (ЛНС). Структура общего решения ЛНС.	ОПК-1
10. Аксиоматика линейного векторного пространства (ЛВП), примеры, свойства ЛВП.	ОПК-1
11. Линейная зависимость системы векторов в ЛВП. Базис и размерность ЛВП. Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора при переходе к новому базису.	ОПК-1
12. Подпространство. Сумма и пересечение подпространств. Линейные оболочки и теоремы о размерности. Изоморфизм ЛВП.	ОПК-1
13. Евклидово пространство, определение и примеры. Неравенства Коши - Буняковского и треугольника. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом пространстве. Ортогональность и ортонормированность системы векторов. Процесс ортогонализации системы векторов.	ОПК-1
14. Определение линейного оператора. Примеры. Образ и ядро линейного оператора.	ОПК-1
15. Матрица линейного оператора в данном базисе. Преобразование матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому.	ОПК-1
16. Действия с линейными операторами. Обратный оператор, его свойства. Критерий обратимости.	ОПК-1
17. Подпространства, инвариантные относительно оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства.	ОПК-1

Характеристическое уравнение.	
18. Унитарный и самосопряженный операторы. Свойства собственных значений и векторов самосопряженного оператора. Существование и нахождение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.	ОПК-1
19. Линейная, билинейная и квадратичная формы в ЛВП. Матрица квадратичной формы (КФ) и ее преобразование при переходе к новому базису. Ранг и индекс КФ.	ОПК-1
20. Теорема Лагранжа о приведении КФ к диагональному виду. Теорема Якоби.	ОПК-1
21. Закон инерции КФ. Критерий Сильвестра положительной определенности КФ.	ОПК-1

5.2.3. Типовые практические задания для экзамена (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-1)

- Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.
- Найти обратную матрицу, если
 а) $A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -3 & 7 & 5 \\ -5 & 2 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.
- Если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, то чему равен элемент c_{31} матрицы $C = A \cdot B$?
- Решить систему уравнений
 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$
- Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$.

7. Найти общее решение линейной системы
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

8. Дана неоднородная система уравнений с 5 неизвестными.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

а) Найти общее решение неоднородной системы уравнений.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение однородной системы.

9. Решить систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$, для

а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=3$; г) $n=4$.

10. Записать систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$
 в виде матричного уравнения

$A \cdot x = b$. Найти общее решение или показать несовместность. Если система совместна, то сделать проверку:

11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Дана матрица линейного оператора в стандартном базисе: $A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу этого оператора в базисе $(1,2), (2,1)$.

13. Пусть $A = \{f_1, f_2, f_3\}$ – система многочленов $f_1 = 2 + t$, $f_2 = 1 + t$, $f_3 = -t$.

а) Найти ранг и базу системы A .

б) Многочлены, не входящие в базу, выразить через многочлены базы.

14. Пусть $V_1 = L(f_1, f_2)$, $V_2 = L(g_1, g_2)$, где $f_1 = 3 + t^2$, $f_2 = 2 + 2t^2$, $g_1 = 2t + 13t^2$, $g_2 = -12t - 3t^2$.

а) Найти базис и размерность пересечения этих подпространств.

б) Базис пересечения разложить по f_1, f_2 и по g_1, g_2 .

15. Для заданной системы векторов выяснить является ли она линейно зависимой или линейно независимой? Найти базу системы, выразить остальные элементы через базу. Чему равен ранг системы? $a_1 = (-1, -1, -2, -5)$, $a_2 = (3, 2, 1, 1)$, $a_3 = (-2, -1, 1, 4)$.

16. Дана система многочленов $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. выяснить является ли она линейно зависимой или линейно независимой? Найти базу системы, выразить остальные элементы через базу. Чему равен ранг системы?

17. Дано подпространство $L = L(a_1)$ и вектор $b = (1, 1, 1)$, $a_1 = (0, 1, 1)$. Найти проекцию вектора b на $L(a_1)$ и ортогональную составляющую. Сделать проверку.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н., Тришин И.М. Линейная алгебра. Учебник и практикум для вузов/ под ред. Кремера Н.Ш. – 3-е изд. – М.: Юрайт, 2021. – 422 с. (Ссылка на карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ:

<http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=767248&idb=0>)

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебник — 13-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). <http://mathdep.ifmo.ru/wp-content/uploads/2020/09/Курс-аналитической-геометрии-и-линейной-алгебры.-Беклемишев-Д.В..pdf>

3. Фадеев Д.К., Симинский И.С. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. – Изд. 17-е, стер. - СПб.; Лань, 2008. - 288 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). (122 экз. Ссылка на карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDocs&ids=444431&idb=0>)

б) дополнительная литература:

1. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитической геометрия. Учебник. – М.: МГУ, 2007. – 393 с. <https://djvu.online/file/FrvvYGuE9qkfd>

2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Учебное пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева –2-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2004. – 496 с. <https://djvu.online/file/zE4fFBE5Pp6Qx>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ

<http://www.unn.ru/books/resources>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Для обучения студентов имеются аудитории, оснащенная партами, учебной доской, мобильное место преподавателя (проектор, ноутбук, экран, ПО для презентаций, презентации лекций), а также учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде и базе электронных изданий университета.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 03.03.03 Радиофизика, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 7 августа 2020 г. N 912.

Автор _____ Павлов И.С.

Заведующий кафедрой _____ Дубков А.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии радиофизического факультета от «25» мая 2023 года, протокол № 04/23.