

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики  
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
президиумом Ученого совета ННГУ  
от 14.12.2021 г. протокол № 4

## **Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Дискретные динамические системы**  
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования  
**Специалитет**  
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность  
**01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»**  
(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы  
**специализация «Фундаментальная механика и приложения»**  
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)  
**Специалист**  
(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения  
**Очная**  
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2022

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.08.02 «Дискретные динамические системы» относится к части ООП специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-11. Умение использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование	<p>ПК-11.1. Знает теоретические основы физического и компьютерного моделирования, основы эксперимента в механике.</p> <p>ПК-11.2. Умеет использовать физические и компьютерные модели объектов и явлений реального мира, сред, тел и конструкций, а также современное экспериментальное оборудование для решения задач механики на основе полученных теоретических знаний.</p> <p>ПК-11.3. Имеет практический опыт использования физических и компьютерных моделей и экспериментального оборудования при решении стандартных задач механики</p>	<p><b>Знает</b> основные понятия теории динамических систем, теоретические основы физического и компьютерного моделирования</p> <p><b>Умеет</b> осуществлять анализ и выбор методов решения задач</p> <p>Имеет практический опыт использования физических и компьютерных моделей для решения задач в соответствии с выбранным методом и построенным алгоритмом</p>	<p><i>Собеседование</i></p> <p><i>Контрольная работа</i></p> <p><i>Контрольная работа</i></p>

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>2 з.е.</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>72</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	
- занятия лабораторного типа	
- текущий контроль (КСР)	1
<b>самостоятельная работа</b>	<b>39</b>

Промежуточная аттестация – зачет

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)		В том числе										Самостоятельная работа обучающегося, часы			
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы, из них								Всего					
			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации										
	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная	Очная	Очно-заочная	Заочная				
Введение в теорию дискретных динамических систем.	5			2							2			3		
Подход к изучению дискретных динамических систем, основанный на понятии «типичности».	5			2							2			3		
Понятие фрактального множества.	5			2							2			3		
Топологическая сопряженность дискретных динамических систем.	9			4							4			5		
Классические теоремы о неподвижных точках.	9			4							4			5		
Понятие структурной устойчивости, Омега-устойчивости, статистической устойчивости.	9			4							4			5		
Основные понятия символической динамики.	9			4							4			5		
О понятии аттрактора.	9			4							4			5		
Введение в одномерную динамику.	12			6							6			6		
в т.ч. текущий контроль	1			1												
Промежуточная аттестация – зачет																
Итоговая контрольная работа (КР) (выполняются письменно), устные ответы на вопросы, зачет при условии выполнения КР.																

Содержание разделов дисциплины

#### 1) Введение в теорию дискретных динамических систем.

Исторический аспект. Поток, отображение сдвига, отображение последования на секущей Пуанкаре как объекты, связанные с автономными системами дифференциальных уравнений. Конструкция надстройки. Примеры.

Динамическая система с дискретным временем как дискретная группа (полугруппа) преобразований фазового пространства  $M$  ( $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $M$  - компакт). Примеры. Пространство  $C^r(M)$ ,  $r \geq 0$ )

## **2) Подход к изучению дискретных динамических систем, основанный на понятии «типичности».**

Множества всюду плотные; граничные; нигде не плотные; 1-ой категории. Теорема Бэра. Следствия. Примеры.

Связь меры и категории. Примеры. Понятие типичного свойства дискретной динамической системы.

## **3) Понятие фрактального множества.**

Примеры. Понятие о размерности Хаусдорфа, вычисление размерности Хаусдорфа классических фрактальных множеств: канторова дисконтинуума, континуумов Серпинского.

## **4) Топологическая сопряженность дискретных динамических систем.**

Примеры топологически сопряженных дискретных динамических систем. Построение сопрягающего гомеоморфизма.

Основные инварианты топологической сопряженности. Классификация траекторий по свойству возвращаемости: периодические, рекуррентные, устойчивые по Пуассону траектории. Примеры.

Асимптотическое описание поведения траекторий дискретной динамической системы:  $\alpha$ - ( $\omega$  -)предельные точки и множества, неблуждающие (блуждающие) точки и множества. Примеры.

## **5) Классические теоремы о неподвижных точках.**

Принцип Боля-Брауэра. Пример применения.

Отображения, удовлетворяющие условию Липшица. Применения принципа сжатых отображений к решению функциональных уравнений.

Гиперболические линейные отображения. Динамические свойства гиперболических линейных отображений. Гиперболические неподвижные точки.

Теорема Гробмана-Хартмана.

Локальная устойчивость гиперболических неподвижных точек. Гиперболические изоморфизмы в пространстве  $GL(\mathbb{R}^n)$  (обратимых линейных отображений  $\mathbb{R}^n$ ).

## **6) Понятие структурной устойчивости, Омега-устойчивости, статистической устойчивости.**

Примеры структурно устойчивых, Омега-устойчивых, статистически устойчивых дискретных динамических систем: диффеоморфизмы окружности Морса-Смейла; гиперболические автоморфизмы тора, Омега-устойчивые косые произведения в плоскости и на торе, статистически устойчивые одномерные отображения.

## **7) Основные понятия символической динамики.**

Гомеоморфизм сдвига, основные свойства. Примеры применения. Подкова Смейла.

## **8) О понятии аттрактора.**

Аттракторы в смысле Конли, странные аттракторы, аттрактор в смысле Милнора, странный нехаотический аттрактор.

## **9) Введение в одномерную динамику.**

Понятие об одномерных моделях. Примеры.

Теорема А.Н. Шарковского. Примеры применения.

Бифуркации в семействе логистических отображений. Универсальность Фейгенбаума. Мультифрактальная структура квазиаттрактора Фейгенбаума.

В результате изучения студенты должны:

1. Знать теоретический материал, излагаемый на лекционных занятиях.
2. Уметь решать задачи по темам, излагаемым на лекционных занятиях.
3. Иметь представление об актуальных проблемах современной теории дискретных динамических систем.

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

В соответствии с рабочей программой и тематическим планом изучение дисциплины проходит в виде аудиторной и самостоятельной работы студентов.

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

#### **Вопросы для самостоятельной работы**

1. Приведите примеры автономных систем дифференциальных уравнений с указанием отображения сдвига по траекториям; допускающих секущую Пуанкаре. Во втором случае постройте отображение последования на секущей Пуанкаре.

2. Докажите полноту пространства  $C^r(M)$ ,  $r \geq 0$ .

3. Приведите примеры всюду плотных; граничных; нигде не плотных множеств в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ ; укажите множество 1-ой категории в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ .

4. Сформулируйте определение дискретной динамической системы. Приведите пример дискретных динамических систем, образующих множество 1-ой категории в  $C^1(S^1)$ .

5. Сформулируйте определение Хаусдорфовой размерности и вычислите Хаусдорфову размерность 1-го континуума Серпинского.

6. Сформулируйте определение топологической сопряженности дискретных динамических систем, приведите примеры топологически сопряженных систем.

7. Какие омега-предельные множества имеет тент-отображение? Существуют ли у тент-отображения счетные омега-предельные множества? Имеет ли тент-отображение гомоклинические точки? Укажите отображение, топологически сопряженное с тент-отображением.

8. Приведите пример применения принципа Боля-Брауэра к исследованию существования состояния равновесия у автономной системы дифференциальных уравнений в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ .

9. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих гиперболические периодические точки периода 2.

10. Проведите классификацию гиперболических периодических точек. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих неподвижные точки-стоки, источники, седла.

11. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих эллиптические неподвижные точки.

12. Сформулируйте определение и приведите примеры структурно устойчивых, Омега-устойчивых и статистически устойчивых дискретных динамических систем.

13. Приведите пример дискретной динамической системы в  $R^2$ , имеющей подкову Смейла. Используя гомеоморфизм сдвига, опишите динамику отображения на подкове Смейла.

14. Приведите пример дискретной динамической системы на двумерном торе, имеющей странный нехаотический аттрактор.

15. Для заданного непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего периодическую точку периода 7 укажите граф периодической орбиты периода 7. По построенному графу опишите множество периодических точек, которые имеет заданное отображение.

16. Приведите набросок доказательства существования универсальности Фейгенбаума.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий), контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме *вопросов и заданий к зачёту*.

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		<u>Знания</u>	<u>Умения</u>	<u>Навыки</u>
<b>плохо</b>	<b>не зачтено</b>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа
<b>неудовлетворительно</b>		Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
<b>удовлетворительно</b>	<b>зач</b>	Минимально допустимый уровень	Продemonстрированы основные умения	Имеется минимальный набор навыков

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		Знания	Умения	Навыки
		знаний. Допущено много негрубых ошибок.	ния. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	ков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
	<b>хорошо</b>	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.
	<b>очень хорошо</b>	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
	<b>отлично</b>	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
	<b>превосходно</b>	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»

Оценка		Уровень подготовки
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
Не зачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

1. Докажите полноту пространства  $C^r(M)$ ,  $r \geq 0$ .
2. Приведите примеры всюду плотных; граничных; нигде не плотных множеств в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ ; укажите множество 1-ой категории в  $R^n$ ,  $n \geq 1$ .
3. Приведите пример применения принципа Боля-Брауэра к исследованию существования состояния равновесия у автономной системы дифференциальных уравнений в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ .
4. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих гиперболические периодические точки периода 2.
5. Приведите примеры дискретных динамических систем в  $R^n$ ,  $n \geq 2$ , имеющих эллиптические неподвижные точки.
6. Приведите пример дискретной динамической системы в  $R^2$ , имеющей подкову Смейла. Используя гомеоморфизм сдвига, опишите динамику отображения на подкове Смейла.
7. Приведите пример дискретной динамической системы на двумерном торе, имеющей странный нехаотический аттрактор.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) основная литература:

1. Пуанкаре А. Избранные труды. Т.1-3. М.: Наука, 1971. (20 экз.)

б) дополнительная литература:

1. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: мир, 1975. (15 экз.)

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в



электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Автор(ы)

к.ф.-м.н., доцент  
Ефремова Л.С.

Рецензент(ы)

Заведующий кафедрой  
дифференциальных урав-  
нений, математического и  
численного анализа

д.ф.-м.н., профессор  
Калинин А.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информаци-  
онных технологий, математики и механики  
от 01.12.2021 года, протокол № 2.